

ПОЛЯ, ВАКУУМ И ЗЕРКАЛЬНАЯ ВСЕЛЕННАЯ

SVENSKA FYSIKARKIVET 2010

Лариса Борисова и Дмитрий Рабунский

Поля, вакуум и зеркальная Вселенная

Fält, vakuum och spegeluniversum

2010

Шведский физический архив
Svenska fysikarkivet

Svenska fysikarkivet (that means the Swedish physics archive) is a publisher registered with the Royal National Library of Sweden (Kungliga biblioteket), Stockholm.

Postal address for correspondence:
Svenska fysikarkivet, Näsbydalsvägen 4/11, 183 31 Täby, Sweden

Cover image: This image taken with NASA's Hubble Space Telescope depicts bright, blue, newly formed stars that are blowing a cavity in the center of a star-forming region in the Small Magellanic Cloud. This image is a courtesy of the Hubble Space Telescope Science Institute (STScI) and NASA. This image is a public domain product; see http://hubblesite.org/copyright for details. We are thankful to STScI and NASA for the image.

This book was typeset using the LaTeX typesetting system. Powered by Ubuntu Linux.

Updated with errata on September 12, 2010.

ISBN: 978-91-85917-11-2

Printed in the United States of America

Содержание

Предисловие ко 2-му изданию

Это второе издание книги, первоначально вышедшей в 1999 году под названием *Теория негеодезического движения частиц*. Поскольку такое формальное название книги было неудачным и, кроме того, ее английский перевод *Fields, Vacuum, and the Mirror Universe* разошелся о всему миру и стал широко известен в международном научном сообществе, мы пришли к выводу что второе русское издание должно быть опубликовано под таким же названием, что и английское, во избежание путаницы.

В данном, втором, издании мы исправили замеченные опечатки в формулах и разделили последнюю главу на две, в соответствии с контекстом, как и было сделано при переводе на английский.

Немного о сути данной книги. Когда мы рассматриваем какую-то задачу в рамках Общей Теории Относительности, мы делаем это с помощью методов математического аппарата римановой геометрии. Таких математических методов может быть несколько. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц в их знаменитой *Теории поля*, которая уже стала де-факто стандартом университетского учебника по Общей Теории Относительности, дали замечательный обзор теории движения частиц в гравитационном и электромагнитном полях. Они, однако, использовали исключительно общековариантный метод, впрочем, наиболее общепринятый среди релятивистов. Математический аппарат хронометрических инвариантов, которые являются физическими наблюдаемыми величинами в Общей Теории Относительности, не был еще разработан в середине 1930-х, когда Ландау и Лифшиц работали над первым изданием своей книги. Этот математический аппарат был разработан Зельмановым позднее, в 1944 году. В данной книге мы исправили этот недочет, и рассмотрели теорию движения частиц в гравитационном и электромагнитном полях методами математического аппарата хронометрических инвариантов. Кроме того, Ландау и Лифшиц вообще не рассматривали частицы со спином (внутренним механическим моментом). Поэтому в данной книге мы посвятили этой задаче целую главу. Мы также ввели теорию физического вакуума и μ-вакуума, и рассмотрели возможные следствия этой теории в релятивистской космологии. В отдельной главе нашей книги мы ввели концепцию зеркальной Вселенной и

рассмотрели эту задачу в рамках Общей Теории Относительности, что является актуальной проблемой начиная еще с пионерских работ Дирака (1930-е годы). Кроме того, мы добавили главу, в которой дали основы тензорной алгебры и анализа в терминах математического аппарата хронометрических инвариантов, во всех необходимых подробностях. Все это делает нашу книгу современным дополнением к *Теории поля*.

Завершая это предисловие, мы хотели бы выразить глубокую признательность нашим учителям, Абраму Леонидовичу Зельманову (1913–1987) и Кириллу Петровичу Станюковичу (1916–1989). Много лет персонального обучения и бессчетные часы бесед с ними в дружеской неформальной обстановке посеяли семена тех фундаментальных идей, которые только сейчас получили развитие в нашем сознании и отразились на этих страницах. Мы также глубоко благодарны Кириллу Ивановичу Добмровскому, научные беседы и дискуссии с которым глубоко повлияли на наше научное мировоззрение и идеи, пришедшие нам годы позже.

Наши отдельные благодарности за русское издание этой книги: Геннадию Григорьевичу Россошу, взявшему на себя труд литературного редактора, а также Анатолию Васильевичу Белякову, который набрал весь русский текст книги.

15 мая 2010 *Лариса Борисова и Дмитрий Рабунский*

Глава 1 Введение

§1.1 Геодезическое движение частиц

Многочисленные эксперименты по проверке выводов Общей Теории Относительности прямо свидетельствуют о том, что ее базовое пространство-время (четырехмерное псевдориманово пространство) является основой геометрии нашего реального мира. Это означает также, что даже по мере развития экспериментальной физики и астрономии, когда обнаружатся новые пространственно-временные эффекты, необъяснимые в рамках существующей теории, четырехмерное псевдориманово пространство будет основой для дальнейшего расширения базовой геометрии Общей Теории Относительности и войдет в нее как частный случай. Поэтому, при построении математической теории движения частиц, мы рассматриваем их движение именно в четырехмерном псевдоримановом пространстве.

Здесь необходимо сделать одно замечание, касающееся терминологии. Вообще базовое пространство-время Общей Теории Относительности — это *риманово пространство** четырех измерений со знакопеременной сигнатурой Минковского (+−−−) или (−+++). Последнее означает (3+1) разбиение координатных осей риманова пространства на три пространственные координатные оси и ось времени. Из соображений удобства в расчетах наиболее часто рассматривают риманово пространство с сигнатурой (+−−−), когда время является вещественным, а пространство мнимым. В некоторых теориях, в основном в Специальной Теории Относительности, используют также сигнатуру (−+++), когда время мнимое, а пространство вещественное. Но сигнатура римановых пространств может быть и знакопостоянной, например (++++). Поэтому риманово пространство со знакопеременной сигнатурой обычно называют *псевдоримановым пространством*, чтобы подчеркнуть разбиение координатных осей на два типа. Однако при этом его геометрические свойства все равно относятся к свойствам римановой геометрии и приставка "псевдо" с математической точки зрения не совсем корректна. Тем

*Т.е. метрическое пространство, геометрия которого определяется метрикой Римана $ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta$. Бернхард Риман (1826–1866), немецкий математик, основоположник римановой геометрии (1854).

не менее мы будем использовать это обозначение как устоявшееся и привычное пониманию.

Итак рассмотрим движение частиц в четырехмерном псевдоримановом пространстве. Если на частицу действует только гравитационная сила, то она находится в свободном падении, двигаясь по кратчайшей (*геодезической*) траектории. Такое движение частицы называют *свободным*, или *геодезическим движением*. Если же на частицу действуют какие-то дополнительные силы негравитационной природы, то они отклоняют ее от геодезической траектории и движение частиц становится *негеодезическим*.

С геометрической точки зрения движение частицы в четырехмерном псевдоримановом пространстве есть параллельный перенос некоторого четырехмерного вектора Q^{α}, характеризующего движение этой частицы и поэтому касательного к траектории движения в каждой ее точке. Соответственно, уравнения движения частицы являются уравнениями параллельного переноса вектора Q^{α} вдоль ее четырехмерной траектории и представляют собой выражения абсолютной производной данного вектора по некоторому параметру ρ, который имеет место вдоль всей траектории движения частицы и на этом протяжении не равен нулю.

$$\frac{\mathrm{D}Q^{\alpha}}{d\rho}=\frac{dQ^{\alpha}}{d\rho}+\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}Q^{\mu}\frac{dx^{\nu}}{d\rho}\,,\qquad \alpha,\mu,\nu=0,1,2,3. \tag{1.1}$$

Здесь $\mathrm{D}Q^{\alpha}=dQ^{\alpha}+\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}Q^{\mu}dx^{\nu}$ абсолютный дифференциал (абсолютное приращение) вектора Q^{α}, отличающийся от обычного дифференциала dQ^{α} наличием символов Кристоффеля 2-го рода $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ (коэффициентов связности риманова пространства)*, которые вычисляются через символы Кристоффеля (коэффициенты связности) 1-го рода $\Gamma_{\mu\nu,\rho}$ и являются функциями первых производных фундаментального метрического тензора $g_{\alpha\beta}$

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}=g^{\alpha\rho}\,\Gamma_{\mu\nu,\rho}\,,\quad \Gamma_{\mu\nu,\rho}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^{\nu}}+\frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}}\right). \tag{1.2}$$

При движении вдоль геодезической траектории (свободное движение) параллельный перенос осуществляется методом, который

---

*Коэффициенты связности риманова пространства (символы Кристоффеля) названы по имени немецкого математика Эльвина Бруно Кристоффеля (1829-1900), который вывел их в 1869 году. В пространстве-времени Специальной Теории Относительности (пространство Минковского) всегда можно задать инерциальную систему отсчета, в которой матрица фундаментального метрического тензора принимает вид диагональной единичной матрицы и все символы Кристоффеля обращаются в нуль.

предложил Леви-Чивита*. В этом случае абсолютная производная четырехмерного вектора частицы равна нулю

$$\frac{dQ^\alpha}{d\rho}+\Gamma^\alpha_{\mu\nu}Q^\mu\frac{dx^\nu}{d\rho}=0 \tag{1.3}$$

и квадрат переносимого вектора сохраняется вдоль всей траектории $Q_\alpha Q^\alpha = const$. Такие уравнения называются уравнениями движения свободных частиц.

В рамках кинематики движение частицы характеризуется четырехмерным вектором ускорения (иначе именуемым *кинематическим вектором*)

$$Q^\alpha=\frac{dx^\alpha}{d\rho}\,, \tag{1.4}$$

при параллельном переносе которого в смысле Леви-Чивита получаются уравнения четырехмерных траекторий свободной частицы (*уравнения геодезических линий*)

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\rho^2}+\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\rho}\frac{dx^\nu}{d\rho}=0\,. \tag{1.5}$$

Необходимость условия $\rho\neq 0$ вдоль траектории движения приводит к тому, что параметр дифференцирования ρ оказывается разным вдоль траекторий различного типа. В псевдоримановом пространстве принципиально возможны три типа траекторий, каждому их которых соответствует свой тип частиц:

1) *неизотропные вещественные траектории*, лежащие "внутри" светового гиперконуса. Вдоль таких траекторий квадрат пространственно-временного интервала $ds^2>0$, а сам интервал ds является вещественным. Это траектории движения досветовых частиц с ненулевой массой покоя и вещественной релятивистской массой;

2) *неизотропные мнимые траектории*, лежащие "снаружи" светового гиперконуса. Вдоль траекторий такого типа квадрат пространственно-временного интервала $ds^2<0$, а сам интервал ds является мнимым. Это траектории движения сверхсветовых частиц — тахионов† — релятивистская масса которых является мнимой;

---

*Туллио Леви-Чивита (1873–1941) — итальянский математик, впервые рассмотревший такой параллельный перенос [1].

†Тахионы (tachyons) — сверхсветовые частицы. Возможность их существования, а также возможность сверхсветовых сигналов в рамках Специальной Теории Относительности была впервые рассмотрена в 1958 году Фрэн-

3) *изотропные траектории*, лежащие собственно на световом гиперконусе и представляющие собой траектории частиц с нулевой массой покоя (безмассовые светоподобные частицы), движущихся со скоросью света. Вдоль изотропных траекторий пространственно-временной интервал равен нулю, $ds^2=0$, но не равен нулю трехмерный интервал.

В качестве параметра дифференцирования вдоль неизотропных траекторий обычно используют пространственно-временной интервал ds. Однако вдоль траекторий безмассовых частиц $ds=0$ и его нельзя использовать как параметр дифференцирования. Поэтому в 1944 году А. Л. Зельманов предложил использовать в качестве параметра дифференцирования вдоль изотропных траекторий другую величину, не равную нулю вдоль изотропных траекторий

$$d\sigma^2 = \left(-\,g_{ik} + \frac{g_{0i}g_{0k}}{g_{00}}\right) dx^i dx^k, \tag{1.6}$$

которая представляет собой трехмерный (пространственный) физический наблюдаемый интервал [9]. Независимо от Зельманова, к такому же выводу пришли Ландау и Лифшиц (см. §84 в их фундаментальной книге *Теория поля* [10]).

Подставляя в обобщенные уравнения геодезических (1.5) соответствующие параметры дифференцирования, получаем уравнения неизотропных геодезических линий (траектории массовых частиц)

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0 \tag{1.7}$$

и уравнения изотропных геодезических линий (траектории распространения света)

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\sigma^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx^\nu}{d\sigma} = 0\,. \tag{1.8}$$

Однако чтобы получить полную картину движения частицы, нам необходимо построить динамические уравнения движения, содержащие в себе физические характеристики движения частицы (массу,

ком Тангерлини в его диссертации [2]. Как было показано Г. Б. Малыкиным и Э. Г. Малыкиным [3], большинство исследований по истории тахионов не упоминают этот существенный факт. Тем не менее, наиболее серьезные обзоры на ту тему, такие как [4, 5], ссылаются на Тангерлини. Тахионы были впервые заявлены в журнальных публикациях по теории относительности Терлецким, в его принципиальной работе 1960 года [6], и затем в более детальной публикации 1962 года [7] (Биланюк, Дешпанд и Сударшан). Собственно термин "тахионы" был впервые использован позднее, в 1967 году Фейнбергом [8]. См. подробности в обзоре Г. Б. Малыкина и Э. Г. Малыкина [3].

частоту и т.п.). Геометрически динамические уравнения движения представляют собой уравнения параллельного переноса четырехмерного динамического вектора частицы вдоль ее траектории (равенство нулю абсолютной производной динамического вектора по параметру, не равного нулю вдоль траектории). Движение свободных массовых частиц (неизотропные геодезические траектории) характеризуется четырехмерным вектором импульса

$$P^{\alpha}=m_0\frac{dx^{\alpha}}{ds}\,, \tag{1.9}$$

где m_0 масса покоя частицы. При параллельном переносе в смысле Леви-Чивита четырехмерного вектора импульса P^{α} получаются динамические уравнения движения свободных массовых частиц

$$\frac{dP^{\alpha}}{ds}+\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}P^{\mu}\frac{dx^{\nu}}{ds}=0\,,\qquad P_{\alpha}P^{\alpha}=m_0^2=const. \tag{1.10}$$

Движение безмассовых частиц (изотропные геодезические) характеризуется четырехмерным волновым вектором

$$K^{\alpha}=\frac{\omega}{c}\frac{dx^{\alpha}}{d\sigma}\,, \tag{1.11}$$

где ω собственная циклическая частота безмассовой частицы. Собственно, при параллельном переносе в смысле Леви-Чивита вектора K^{α} получаются динамические уравнения движения свободных безмассовых частиц

$$\frac{dK^{\alpha}}{d\sigma}+\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}K^{\mu}\frac{dx^{\nu}}{d\sigma}=0\,,\qquad K_{\alpha}K^{\alpha}=0\,. \tag{1.12}$$

Итак мы имеем динамические уравнения движения для свободных массовых частиц и свободных безмассовых частиц. Все эти уравнения записаны в четырехмерном общековариантном виде. Это имеет как свое преимущество, так и существенный недостаток. Преимуществом является инвариантность таких уравнений при любых переходах от одной системы к другой. К недостатку относится то, что в общековариантной форме члены уравнений не выражены через реальные трехмерные величины, которые мы можем зарегистрировать в экспериментах или наблюдениях (т.е. через *физические наблюдаемые величины*). Это означает, что в общековариантной форме уравнения движения частиц могут иметь ценность только как промежуточный результат теории и не могут быть применены на практике. Поэтому, если мы хотим наглядно представить себе результаты какой-либо физико-математической теории, нам необхо-

димо выразить ее уравнения через физические наблюдаемые величины. В том числе для расчетов движения конкретных частиц нам необходимо выразить общековариантные динамические уравнения движения через физически наблюдаемые характеристики этих частиц и наблюдаемые характеристики реальной физической системы отсчета. Однако проблема определения физических наблюдаемых величин вовсе не является тривиальной. Например, если для четырехмерного вектора Q^{α} (у которого всего 4 компоненты) можно эвристически *предположить*, что три его пространственные компоненты образуют трехмерный наблюдаемый вектор, а временная компонента представляет собой наблюдаемый потенциал этого векторного поля (что, в общем, не является доказательством их реальной наблюдаемости), то для контравариантного тензора второго ранга $Q^{\alpha\beta}$ (у которого целых 16 компонент) эта задача становится более неопределенной. Кроме того, возникает сложность, связанная с определением наблюдаемых компонент ковариантных тензоров (у которых индексы являются нижними) и тензоров смешанного типа, у которых есть и верхние и нижние индексы. Поэтому, чтобы не блуждать в потемках эвристических догадок, наиболее рациональным выходом из положения является создание строгой математической теории, позволяющей вычислять наблюдаемые компоненты для любых тензорных величин. Такая математическая теория была создана в 1944 году Зельмановым и изложена в его диссертации [9]. Справедливости ради надо отметить, что над созданием теории наблюдаемых величин в 40-е годы работали многие. Например, Ландау и Лифшиц в поздних изданиях своей *Теории поля* [10] вводят наблюдаемое время и наблюдаемый интервал аналогично Зельманову. Однако, ограничившись этим фрагментом теории, они не выводят общих математических методов определения физических наблюдаемых величин в псевдоримановом пространстве. В последующие десятилетия Зельманов совершенствовал свой математический аппарат физических наблюдаемых величин (хронометрических инвариантов), изложив его в нескольких более поздних работах [11–13]. Поэтому в следующем параграфе этой главы мы ограничимся лишь кратким обзором методов теории физических наблюдаемых величин, необходимым для общего понимания и использования на практике. В третьем параграфе мы изложим результаты исследования геодезического движения частиц методами математического аппарата хронометрических инвариантов.

Теория, схожая с теорией Зельманова, была также предложена Карло Катано [14–17], итальянским математиком, работавшим неза-

висимо от Зельманова. Однако Катано опубликовал свою первую работу на эту тему только в 1958 году [14].

Четвертый параграф посвящен постановке задач построения динамических уравнений движения частиц по негеодезическим траекториям, т.е. под влиянием внешних сил негравитационной природы.

§ 1.2 Физические наблюдаемые величины

В этом параграфе мы изложим основы математического аппарата хронометрических инвариантов А. Л. Зельманова.

Чтобы математически определить, какие компоненты четырехмерных величин представляют собой физически наблюдаемые величины, рассмотрим реальную систему отсчета некоторого наблюдателя, состоящую из *координатных сеток*, натянутых на некоторое физическое тело — *тело отсчета*, в каждой точке которого установлены *реальные часы*. Так как тело отсчета является реальным физическим телом, то оно обладает некоторым гравитационным потенциалом, может вращаться и деформироваться, делая пространство отсчета неоднородным и анизотропным. Таким образом, физически наблюдаемые величины должны получаться в результате проецирования четырехмерных величин на пространство и время реального тела отсчета наблюдателя.

Геометрически трехмерное пространство представляет собой *пространственное сечение* $x^0 = ct = const$. В любой точке пространства-времени можно провести локальное пространственное сечение (локальное пространство), ортогональное *линии времени*. Если существует пространственно-временная огибающая локальных пространств, то она представляет собой пространственное сечение, всюду ортогональное линиям времени. Такое пространство называется *голономным*. Если невозможно провести огибающую этих локальных пространств, т.е. существуют только пространственные сечения, локально ортогональные к линиям времени, то такое пространство называется *неголономным*. Будем считать, что наблюдатель неподвижен относительно своих физических эталонов (тела отсчета). Система отсчета такого наблюдателя во всех перемещениях сопутствуют телу отсчета и называется *сопутствующей системой отсчета*. Все координатные сетки, покоящиеся относительно одного и того же тела отсчета, связаны преобразованиями вида

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{x}^0 = \tilde{x}^0\left(x^0,\, x^1,\, x^2,\, x^3\right) \\ &\tilde{x}^i = \tilde{x}^i\left(x^1,\, x^2,\, x^3\right), \qquad \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^0} = 0 \end{aligned}\right\}, \tag{1.13}$$

где последнее равенство означает независимость пространственных координат в тильдованной сетке от времени в нетильдованной, что эквивалентно заданию в каждой точке координатной сетки конкретных и неизменных линий времени $x^i = const$. Преобразование координат означает просто переход от одной координатной сетки к другой в одном и том же пространственном сечении. Преобразование времени означает замену всего набора часов, т.е. переход к другому пространственному сечению (пространству отсчета). На практике — это фактическая замена одного тела отсчета со всеми его физическими эталонами другим телом отсчета с другими эталонами. А при сравнении с другими эталонами наблюдатель получит совершенно другие результаты (наблюдаемые величины). Поэтому физически наблюдаемые величины должны быть инвариантны относительно преобразований времени, т.е. должны быть *хронометрически инвариантными величинами*.

Так как преобразования (1.13) устанавливают совокупность фиксированных линий времени, то хронометрическими инвариантами (физически наблюдаемыми величинами) являются все величины, инвариантные относительно данных преобразований.

Практически, чтобы получить физические наблюдаемые величины в сопутствующей системе отсчета, необходимо вычислить хронометрически инвариантные проекции четырехмерных величин на время и на пространство реального физического тела отсчета и выразить их через хронометрически инвариантные (физически наблюдаемые) характеристики пространства отсчета.

Собственно проецирование четырехмерных величин производится с помощью операторов, характеризующих свойства реального пространства отсчета. Оператор проецирования на время b^α представляет собой единичный вектор четырехмерной скорости системы отсчета наблюдателя (тела отсчета)

$$b^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}\,, \tag{1.14}$$

который касателен к четырехмерной траектории наблюдателя в каждой ее точке. Так как любую систему отсчета характеризует свой единичный касательный вектор b^α, то Зельманов назвал этот вектор *монадой*. Оператор проецирования на пространство определяется как четырехмерный симметричный тензор

$$\left.\begin{aligned} h_{\alpha\beta} &= -\,g_{\alpha\beta} + b_\alpha b_\beta \\ h^{\alpha\beta} &= -\,g^{\alpha\beta} + b^\alpha b^\beta \end{aligned}\right\}, \tag{1.15}$$

смешанные компоненты которого

$$h_\alpha^\beta = -\,g_\alpha^\beta + b_\alpha b^\beta. \tag{1.16}$$

Зельманов также показал в своих работах, что эти величины обладают необходимыми свойствами операторов проецирования. Проекция тензорной величины на время представляет собой результат ее свертывания с вектором монады. Проецирование на пространство есть свертка с тензором проецирования на пространство. В сопутствующей системе отсчета трехмерная скорость наблюдателя относительно тела отсчета равна нулю $b^i = 0$. Остальные компоненты вектора монады

$$b^0 = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\,, \quad b_0 = g_{0\alpha} b^\alpha = \sqrt{g_{00}}\,, \quad b_i = g_{i\alpha} b^\alpha = \frac{g_{i0}}{\sqrt{g_{00}}}\,. \tag{1.17}$$

Соответственно, при $b^i = 0$ компоненты тензора проецирования на пространство

$$\left.\begin{array}{lll} h_{00} = 0\,, & h^{00} = -g^{00} + \dfrac{1}{g_{00}}\,, & h_0^0 = 0 \\ h_{0i} = 0\,, & h^{0i} = -g^{0i}, & h_0^i = \delta_0^i = 0 \\ h_{i0} = 0\,, & h^{i0} = -g^{i0}, & h_i^0 = \dfrac{g_{i0}}{g_{00}} \\ h_{ik} = -g_{ik} + \dfrac{g_{0i} g_{0k}}{g_{00}}\,, & h^{ik} = -g^{ik}, & h_k^i = -g_k^i = \delta_k^i \end{array}\right\}. \tag{1.18}$$

Тензор $h_{\alpha\beta}$ в трехмерном пространстве сопутствующей системы отсчета обладает свойствами фундаментального метрического тензора

$$h_\alpha^i h_k^\alpha = \delta_k^i - b_k b^i = \delta_k^i\,, \qquad \delta_k^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.19}$$

где δ_k^i единичный трехмерный тензор*. Таким образом, в сопутствующей системе отсчета трехмерный тензор h_{ik} может поднимать и опускать индексы у хронометрически инвариантных величин.

Проекции на время и на пространство некоторого вектора Q^α (тензора 1-го ранга) в сопутствующей системе отсчета ($b^i = 0$) имеют

*Тензор δ_k^i представляет собой трехмерную часть четырехмерного единичного тензора δ_β^α, с помощью которого можно производить операцию замены индексов у четырехмерных величин.

вид

$$T = b^{\alpha}Q_{\alpha} = b^{0}Q_{0} = \frac{Q_0}{\sqrt{g_{00}}}\,, \tag{1.20}$$

$$L^{0} = h^{0}_{\beta}Q^{\beta} = -\frac{g_{0k}}{g_{00}}\,Q^{k}, \quad L^{i} = h^{i}_{\beta}Q^{\beta} = \delta^{i}_{k}Q^{k} = Q^{k}. \tag{1.21}$$

Приведем некоторые проекции тензора 2-го ранга $Q^{\alpha\beta}$ в соответствующей системе отсчета

$$T = b^{\alpha}b^{\beta}Q_{\alpha\beta} = b^{0}b^{0}Q_{00} = \frac{Q_{00}}{g_{00}}\,, \tag{1.22}$$

$$L^{00} = h^{0}_{\alpha}h^{0}_{\beta}Q^{\alpha\beta} = -\frac{g_{0i}\,g_{0k}}{g_{00}^{2}}\,Q^{ik}, \quad L^{ik} = h^{i}_{\alpha}h^{k}_{\beta}Q^{\alpha\beta} = Q^{ik}. \tag{1.23}$$

Проверяя опытным путем инвариантность полученных величин относительно преобразований (1.13), получаем, что физически наблюдаемыми являются проекции четырехмерной величины на время и пространственные компоненты проекции на пространство. Итак, проецируя четырехмерные координаты x^{α} на время и на пространство, получаем *физически наблюдаемое время*

$$\tau = \sqrt{g_{00}}\,t + \frac{g_{0i}}{c\sqrt{g_{00}}}\,x^{i}, \tag{1.24}$$

и *физически наблюдаемые координаты*, которые совпадают с пространственными координатами x^{i}. Аналогично, при проецировании элементарного интервала четырехмерных координат dx^{α} получаем элементарный интервал физического наблюдаемого времени

$$d\tau = \sqrt{g_{00}}\,dt + \frac{g_{0i}}{c\sqrt{g_{00}}}\,dx^{i} \tag{1.25}$$

и элементарный интервал физических наблюдаемых координат dx^{i}. Соответственно, *физическая наблюдаемая скорость* частицы есть трехмерный хронометрически инвариантный вектор

$$\mathrm{v}^{i} = \frac{dx^{i}}{d\tau}\,, \tag{1.26}$$

который отличается от вектора ее трехмерной координатной скорости $u^{i} = \frac{dx^{i}}{dt}$.

Проецируя фундаментальный метрический тензор на пространство, получаем, что в сопутствующей системе отсчета h_{ik} является *хронометрически инвариантным метрическим тензором*, или, другими словами, *физически наблюдаемым пространственным*

метрическим тензором образованным пространственными составляющими тензора проецирования на пространство

$$h^i_\alpha h^k_\beta \, g^{\alpha\beta} = g^{ik} = -\,h^{ik}, \qquad h^\alpha_i h^\beta_k g_{\alpha\beta} = g_{ik} - b_i b_k = -\,h_{ik}\,; \quad (1.27a)$$

его компоненты равны

$$h_{ik} = -\,g_{ik} + b_i b_k\,, \quad h^{ik} = -\,g^{ik}, \quad h^i_k = -\,g^i_k = \delta^i_k\,. \qquad (1.27b)$$

Таким образом, квадрат трехмерного физического наблюдаемого интервала $d\sigma$ имеет вид

$$d\sigma^2 = h_{ik}\, dx^i dx^k. \qquad (1.28)$$

Четырехмерный пространственно-временной интервал, выраженный через физические наблюдаемые величины, получается при подстановке $g_{\alpha\beta}$ из (1.15),

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - d\sigma^2. \qquad (1.29)$$

Однако, кроме проекций на время и пространство, у четырехмерных величин 2-го и более высокого ранга есть также смешанные компоненты, имеющие одновременно и верхние и нижние индексы. Как определить, есть ли среди них физические наблюдаемые величины? Для этого было бы наиболее целесообразным разработать обобщенный метод вычисления физических наблюдаемых величин, основанный исключительно на свойстве их хронометрической инвариантности и позволяющий сразу найти все наблюдаемые величины для любого тензора. Такой метод был разработан Зельмановым и сформулирован в виде теоремы.

Теорема Зельманова

Пусть $Q^{ik\dots p}_{00\dots 0}$ — компоненты некоторого четырехмерного тензора $Q^{\mu\nu\dots\rho}_{00\dots 0}$ r-ранга, все верхние индексы которого отличны от нуля, а все m нижних индексов равны нулю. Тогда совокупность величин

$$T^{ik\dots p} = (g_{00})^{-\frac{m}{2}}\, Q^{ik\dots p}_{00\dots 0} \qquad (1.30)$$

образуют хронометрически инвариантный трехмерный контравариантный тензор ранга $(r{-}m)$ При этом тензор $T^{ik\dots p}$ представляет собой результат m-кратного проецирования на время по индексам $\alpha, \beta \dots \sigma$ и проецирования на пространство по $r{-}m$ индексам $\mu, \nu \dots \rho$ исходного тензора $Q^{\mu\nu\dots\rho}_{\alpha\beta\dots\sigma}$.

Из этой теоремы непосредственно следует, что для вектора Q^α физически наблюдаемыми являются две величины, полученные ранее

путем проецирования

$$b^{\alpha}Q_{\alpha}=\frac{Q_0}{\sqrt{g_{00}}}\,,\qquad h^i_{\alpha}Q^{\alpha}=Q^i. \tag{1.31}$$

Для симметричного тензора 2-го ранга $Q^{\alpha\beta}$ физическими наблюдаемыми являются три величины

$$b^{\alpha}b^{\beta}Q_{\alpha\beta}=\frac{Q_{00}}{g_{00}}\,,\quad h^{i\alpha}b^{\beta}Q_{\alpha\beta}=\frac{Q^i_0}{\sqrt{g_{00}}}\,,\quad h^i_{\alpha}h^k_{\beta}Q^{\alpha\beta}=Q^{ik}, \tag{1.32}$$

в то время как для антисимметричного тензора 2-го ранга первая наблюдаемая компонента равна нулю, т.к. $Q_{00}=Q^{00}=0$.

Вычисленные таким образом физические наблюдаемые величины (хронометрические инварианты) необходимо сравнить с эталонами — наблюдаемыми характеристиками пространства отсчета, специфическими для каждого конкретного тела отсчета. Поэтомы рассмотрим основные наблюдаемые характеристики пространства отсчета, через которые мы будем выражать итоговые уравнения теории. Физические наблюдаемые характеристики пространства отсчета выводятся с помощью хронометрически инвариантных операторов дифференцирования по времени и по пространственным координатам

$$\frac{^*\partial}{\partial t}=\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\frac{\partial}{\partial t}\,,\qquad \frac{^*\partial}{\partial x^i}=\frac{\partial}{\partial x^i}-\frac{g_{0i}}{g_{00}}\frac{\partial}{\partial x^0}\,, \tag{1.33}$$

которые некоммутативны

$$\frac{^*\partial^2}{\partial x^i\,\partial t}-\frac{^*\partial^2}{\partial t\,\partial x^i}=\frac{1}{c^2}\,F_i\,\frac{^*\partial}{\partial t}\,, \tag{1.34}$$

$$\frac{^*\partial^2}{\partial x^i\partial x^k}-\frac{^*\partial^2}{\partial x^k\partial x^i}=\frac{2}{c^2}\,A_{ik}\,\frac{^*\partial}{\partial t}\,. \tag{1.35}$$

Величина A_{ik} представляет собой трехмерный антисимметричный хронометрически инвариантный *тензор угловой скорости вращения пространства тела отсчета*

$$A_{ik}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x^i}-\frac{\partial v_i}{\partial x^k}\right)+\frac{1}{2c^2}\left(F_i v_k-F_k v_i\right), \tag{1.36}$$

где v_i обозначает скорость вращения пространства

$$\left.\begin{array}{ll} v_i=-c\,\dfrac{g_{0i}}{\sqrt{g_{00}}}\,, & v^i=-c\,g^{0i}\sqrt{g_{00}} \\ v_i=h_{ik}v^k, & v^2=v_k v^k=h_{ik}v^i v^k \end{array}\right\}. \tag{1.37}$$

Как было показано Зельмановым, равенство нулю тензора A_{ik} является необходимым и достаточным условием голономности пространства. При этом $g_{0i}=0$ и $v_i=0$. В неголономном пространстве всегда $A_{ik}\neq 0$. Таким образом, тензор A_{ik} также является тензором неголономности пространства*.

Величина F_i представляет собой трехмерный хронометрически инвариантный *вектор гравитационно-инерциальной силы*

$$F_i = \frac{1}{1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}}\left(\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^i} - \frac{\partial v_i}{\partial t}\right), \tag{1.38}$$

где w обозначает гравитационный потенциал пространства тела тела отсчета†

$$\mathrm{w} = c^2\left(1-\sqrt{g_{00}}\,\right). \tag{1.38a}$$

В квазиньютоновом приближении, т.е. в слабом гравитационном поле при скоростях, много меньших скорости света, и при отсутствии вращения пространства F_i принимает вид нерелятивистской гравитационной силы

$$F_i = \frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^i}\,. \tag{1.39}$$

Так как тело отсчета наблюдателя является реальным физическим телом, то нанесенные на него координатные сетки деформированы. Соответственно, деформировано и пространство реального тела отсчета. Поэтому, при сравнении наблюдаемых величин с физическими эталонами тела отсчета необходимо учитывать поле деформации пространство отсчета, т.е. нестационарность поля тензора h_{ik}. В реальности стационарная деформация пространства встречается редко: поле деформации все время меняется, что также необходимо учитывать при измерениях. Это можно сделать, выделяя в уравнениях трехмерный симметричный хронометрически инвариантный *тензор скоростей деформации*

$$\left.\begin{aligned} &D_{ik} = \frac{1}{2}\frac{{}^*\partial h_{ik}}{\partial t}\,, \qquad D^{ik} = -\frac{1}{2}\frac{{}^*\partial h^{ik}}{\partial t} \\ &D = h^{ik}D_{ik} = D^n_n = \frac{{}^*\partial \ln\sqrt{h}}{\partial t}\,, \qquad h = \det\|h_{ik}\| \end{aligned}\right\}. \tag{1.40}$$

---

*Голономными ($A_{ik}=0$) являются пространство-время Специальной Теории Относительности (пространство Минковского) в галилеевой системе отсчета и некоторые случаи в Общей Теории Относительности.

†Величины w и v_i сами не обладают свойством хронометрической инвариантности. Хронометрическими инвариантами являются образованные с их помощью вектор гравитационно-инерциальной системы и тензор угловой скорости вращения пространства.

Зная эти определения, мы можем выразить вообще любой геометрический объект риманова пространства через наблюдаемые характеристики пространства отсчета. Например, как известно, входящие в уравнения движения символы Кристоффеля тензорами не являются [18]. Тем не менее их тоже можно выразить через физические наблюдаемые величины. Соответствующие выражения этой связи были получены Зельмановым [9]

$$\Gamma_{00}^{0} = -\frac{1}{c^3}\left[\frac{1}{1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial t} + \left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right) v_k F^k\right], \tag{1.41}$$

$$\Gamma_{00}^{k} = -\frac{1}{c^2}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2 F^k, \tag{1.42}$$

$$\Gamma_{0i}^{0} = \frac{1}{c^2}\left[-\frac{1}{1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^i} + v_k\left(D_i^k + A_{i\cdot}^{\cdot k} + \frac{1}{c^2}\, v_i F^k\right)\right], \tag{1.43}$$

$$\Gamma_{0i}^{k} = \frac{1}{c}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\left(D_i^k + A_{i\cdot}^{\cdot k} + \frac{1}{c^2}\, v_i F^k\right), \tag{1.44}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^{0} = -\frac{1}{c\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)}&\left\{-D_{ij} + \frac{1}{c^2}\, v_n \times \right.\\ &\times\left[v_j\left(D_i^n + A_{i\cdot}^{\cdot n}\right) + v_i\left(D_j^n + A_{j\cdot}^{\cdot n}\right) + \frac{1}{c^2}\, v_i v_j F^n\right] + \\ &\left. + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j} + \frac{\partial v_j}{\partial x^i}\right) - \frac{1}{2c^2}\left(F_i v_j + F_j v_i\right) - \Delta_{ij}^n v_n\right\}, \end{aligned} \tag{1.45}$$

$$\Gamma_{ij}^{k} = \Delta_{ij}^{k} - \frac{1}{c^2}\left[v_i\left(D_j^k + A_{j\cdot}^{\cdot k}\right) + v_j\left(D_i^k + A_{i\cdot}^{\cdot k}\right) + \frac{1}{c^2}\, v_i v_j F^k\right], \tag{1.46}$$

где Δ_{ij}^{k} хронометрически инвариантные символы Кристоффеля, определяемые аналогично обычным символам Кристоффеля (1.2), но через наблюдаемый метрический тензор h_{ik} и хронометрически инвариантные операторы дифференцирования

$$\Delta_{jk}^{i} = h^{im}\Delta_{jk,m} = \frac{1}{2}\, h^{im}\left(\frac{{}^*\partial h_{jm}}{\partial x^k} + \frac{{}^*\partial h_{km}}{\partial x^j} - \frac{{}^*\partial h_{jk}}{\partial x^m}\right). \tag{1.47}$$

Итак, мы изложили основы идеологии и математического аппарата хронометрических инвариантов. Теперь, получив общековариантными методами какие-либо уравнения, мы можем вычислить их

хронометрически инвариантные проекции на время и на пространство конкретного тела отсчета и выразить через реальные физические наблюдаемые характеристики. В результате получаются уравнения, содержащие только такие величины, которые мы реально измеряем на практике.

Естественно, первое, что приходит в голову сделать, вооружившись этим математическим аппаратом, это вычислить хронометрически инвариантные динамические уравнения движения свободных частиц и исследовать полученные результаты. Частное решение данной задачи было получено Зельмановым в его работах [9,11–13]. Общее решение было получено нами в предыдущей книге [19]; об этом общем решении мы расскажем в следующем параграфе.

§ 1.3 Динамические уравнения движения свободных частиц

Абсолютная производная вектора движения частицы по скалярному параметру ρ представляет собой четырехмерный вектор

$$N^{\alpha} = \frac{dQ^{\alpha}}{d\rho} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} Q^{\mu} \frac{dx^{\nu}}{d\rho}\,, \tag{1.48}$$

поэтому хронометрически инвариантные (физические наблюдаемые) компоненты уравнений движения определяются точно так же, как и для любого четырехмерного вектора (1.31)

$$\frac{N_0}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{g_{0\alpha} N^{\alpha}}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \left(g_{00} N^0 + g_{0i} N^i\right), \tag{1.49}$$

$$N^i = h^i_{\beta} N^{\beta} = h^i_0 N^0 + h^i_k N^k. \tag{1.50}$$

С геометрической точки зрения — это проекция вектора N^{α} на время и пространственные компоненты его проекции на пространство в сопутствующей точке отсчета. Аналогично мы можем спроецировать общековариантные динамические уравнения движения свободных массовых частиц (1.10) и свободных безмассовых частиц (1.12). Техника этих вычислений подробно описана нами в [19]. В результате получаются хронометрически инвариантные динамические уравнения движения свободных массовых частиц

$$\frac{dm}{d\tau} - \frac{m}{c^2} F_i \mathrm{v}^i + \frac{m}{c^2} D_{ik} \mathrm{v}^i \mathrm{v}^k = 0\,, \tag{1.51}$$

$$\frac{d\left(m\mathrm{v}^i\right)}{d\tau} + 2m\left(D^i_k + A^{\cdot i}_{k\cdot}\right)\mathrm{v}^k - mF^i + m\Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k = 0 \tag{1.52}$$

и свободных безмассовых частиц

$$\frac{dk}{d\tau} - \frac{k}{c^2}\,F_i c^i + \frac{k}{c^2}\,D_{ik}\,c^i c^k = 0\,, \tag{1.53}$$

$$\frac{d\left(kc^i\right)}{d\tau} + 2k\left(D^i_k + A^{\cdot i}_{k\cdot}\right)c^k - kF^i + k\Delta^i_{nk}c^n c^k = 0\,, \tag{1.54}$$

где m релятивистская масса массовой частицы, $k=\frac{\omega}{c}$ волновое число, характеризующее безмассовую частицу, и c^i трехмерный хронометрически инвариантный вектор скорости света. Причем, как видите, в отличии от общековариантных динамических уравнений движения (1.10, 1.12), в хронометрически инвариантных уравнениях получается единый параметр дифференцирования для массовых и безмассовых частиц (физическое наблюдаемое время τ).

Эти уравнения были впервые получены Зельмановым в 1944 году [9]. Однако впоследствии было установлено, что входящая в них функция времени $\frac{dt}{d\tau}$ является строго положительной [19]. Физическое время наблюдателя имеет положительный ход $d\tau>0$. Ход координатного времени dt показывает изменение временной координаты частицы $x^0=ct$ относительно часов наблюдателя. Поэтому знак функции времени показывает направление движения частицы во времени относительно наблюдателя. Функция времени $\frac{dt}{d\tau}$ выводится из условия постоянства квадрата четырехмерной скорости частицы $u_\alpha u^\alpha = g_{\alpha\beta}\,u^\alpha u^\beta = const$ вдоль ее четырехмерной траектории [19]. Уравнения относительно $\frac{dt}{d\tau}$ для досветовых массовых частиц, для безмассовых частиц и сверхсветовых массовых частиц получаются одинаковыми и имеют два корня

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)_{1,2} = \frac{v_i \mathrm{v}^i \pm c^2}{c^2\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)}\,. \tag{1.55}$$

Как было получено [19], ход времени является прямым, если $v_i\mathrm{v}^i \pm c^2 > 0$, ход времени является обратным при $v_i\mathrm{v}^i \pm c^2 < 0$, время останавливается при $v_i\mathrm{v}^i \pm c^2 = 0$. Таким образом, существует целый спектр решений для различных типов частиц и их направлений движения во времени относительно наблюдателя. Например, релятивистская масса частицы, являющаяся проекцией ее четырехмерного динамического вектора на время $\frac{P_0}{\sqrt{g_{00}}} = \pm m$, получается положительной при движении в будущее и отрицательное значение при движении в прошлое*.

*Релятивистская масса является проекцией четырехмерного вектора частицы на линию времени наблюдателя.

В нашей предыдущей работе [19] было также показано, что хронометрически инвариантные динамические уравнения движения свободных массовых и безмассовых частиц с обратным ходом времени, движущихся из будущего в прошлое, имеют вид

$$-\frac{dm}{d\tau} - \frac{m}{c^2}\,F_i\mathrm{v}^i + \frac{m}{c^2}\,D_{ik}\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k = 0\,, \tag{1.56}$$

$$\frac{d\left(m\mathrm{v}^i\right)}{d\tau} + mF^i + m\Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k = 0 \tag{1.57}$$

и, соответственно,

$$-\frac{dk}{d\tau} - \frac{k}{c^2}\,F_i c^i + \frac{k}{c^2}\,D_{ik}c^i c^k = 0\,, \tag{1.58}$$

$$\frac{d\left(kc^i\right)}{d\tau} + kF^i + k\Delta^i_{nk}c^n c^k = 0\,. \tag{1.59}$$

Для сверхсветовых частиц уравнения движения получаются аналогичными досветовым (1.56, 1.57), только у релятивистской массы m в качестве множителя стоит мнимая единица i.

Асимметричность уравнений движения частиц в будущее и в прошлое получается из-за различия физических условий при прямом и обратном ходе времени, приводящего к исчезновению некоторых членов уравнений.

Кроме этого, в [19] мы рассмотрели движение массовых и безмассовых частиц в рамках концепции частица-волна, полагая, что движение любых частиц можно представить как распространение волн в приближении геометрической оптики. В этом случае динамический вектор безмассовых частиц имеет вид

$$K_\alpha = \frac{\partial\psi}{\partial x^\alpha}\,, \tag{1.60}$$

где ψ фаза волны (эйконал). Аналогично мы рассматриваем динамический вектор безмассовых частиц

$$P_\alpha = \frac{\hbar}{c}\,\frac{\partial\psi}{\partial x^\alpha}\,, \tag{1.61}$$

где $\hbar$ постоянная Планка. Уравнение фазы волны (уравнение эйконала) в приближении геометрической оптики представляет собой условие $K_\alpha K^\alpha = 0$. Тогда хронометрически инвариантное уравнение эйконала для безмассовых частиц

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{{}^*\partial\psi}{\partial t}\right)^2 - h^{ik}\,\frac{{}^*\partial\psi}{\partial x^i}\,\frac{{}^*\partial\psi}{\partial x^k} = 0\,, \tag{1.62}$$

и для массовых частиц

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{^*\partial\psi}{\partial t}\right)^2 - h^{ik}\,\frac{^*\partial\psi}{\partial x^i}\,\frac{^*\partial\psi}{\partial x^k} = \frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\,. \tag{1.63}$$

После подстановки волновой формы динамического вектора в общековариантные динамические уравнения движения (1.10, 1.12) и их проецирования на время и на пространство получается волновая форма хронометрически инвариантных динамических уравнений движения. Для массовых частиц эти уравнения имеют вид

$$\pm\,\frac{d}{d\tau}\left(\frac{^*\partial\psi}{\partial t}\right) + F^i\,\frac{^*\partial\psi}{\partial x^i} - D_k^i\,\mathrm{v}^k\,\frac{^*\partial\psi}{\partial x^i} = 0\,, \tag{1.64}$$

$$\begin{gathered}\frac{d}{d\tau}\left(h^{ik}\,\frac{^*\partial\psi}{\partial x^k}\right) - \left(D_k^i + A_{k\cdot}^{\cdot i}\right)\left(\pm\,\frac{1}{c^2}\,\frac{^*\partial\psi}{\partial t}\,\mathrm{v}^k - h^{km}\,\frac{^*\partial\psi}{\partial x^m}\right) \pm \\ \pm\,\frac{1}{c^2}\,\frac{^*\partial\psi}{\partial t}\,F^i + h^{mn}\Delta_{mk}^i\mathrm{v}^k\,\frac{^*\partial\psi}{\partial x^n} = 0\,,\end{gathered} \tag{1.65}$$

где знак плюс у знакопеременных членов имеет место при движении частиц из прошлого в будущее (прямой ход времени) и знак минус при движении из будущего в прошлое (обратный ход времени). Причем, в отличии от корпускулярной формы уравнений движения (1.51, 1.52) и (1.56, 1.57), данные уравнения симметричны относительно направления движения частиц во времени. Для безмассовых частиц волновая форма хронометрически инвариантных динамических уравнений движения отличается только тем, что вместо трехмерной наблюдаемой скорости частицы v^i там стоит трехмерный хронометрически инвариантный вектор скорости света c^i.

Асимметричность корпускулярных уравнений движения в будущее и в прошлое приводит нас к очевидному выводу о том, что в четырехмерном неоднородном пространстве-времени существует некоторая фундаментальная асимметрия направлений во времени. Чтобы понять физический смысл этой фундаментальной асимметрии, в предыдущей работе был введен *принцип зеркала* [19].

Представим себе, что в четырехмерном пространстве-времени расположено *зеркало*, которое совпадает с пространственным сечением и, таким образом, отделяет прошлое от будущего. Тогда частицы и волны, движущиеся из прошлого в будущее (с положительной релятивистской массой и частотой), ударяются о зеркало и начинают двигаться в обратном направлении во времени, т.е. в прошлое. При этом их характеристики приобретают отрицательные значения.

И наоборот, частицы и волны, движущиеся в прошлое (с отрицательной релятивистской массой и частотой), ударившись о зеркало, меняют свои характеристики на положительные и начинают двигаться в будущее. Тогда при отражении от нашего зеркала величина $\frac{^*\partial\psi}{dt}$ меняет свой знак и уравнения распространения волны в будущее преобразуются в уравнения распространения этой же волны в прошлое (и наоборот). Причем уравнения распространения волн при отражении во времени преобразуются друг в друга *полностью*, без сокращения и без возникновения новых членов. То есть для волновой формы материи имеет место *полное отражение* от нашего зеркала. Однако корпускулярные уравнения движения при отражении от нашего зеркала преобразуются *не полностью.* В пространственных компонентах уравнений для массовых и безмассовых частиц, движущихся из прошлого в будущее, присутствует дополнительный член

$$2m\left(D_k^i + A_{k\cdot}^{\cdot i}\right)\mathrm{v}^k, \qquad 2k\left(D_k^i + A_{k\cdot}^{\cdot i}\right)c^k, \tag{1.66}$$

отсутствующий в уравнениях движения из будущего в прошлое. Уравнения движения частицы в прошлое при взаимодействии с зеркалом приобретают дополнительный член. И наоборот, уравнения движения частицы в будущее после столкновения с зеркалом теряют один член. Это означает, что, как и в случае с движением частиц (корпускулярные уравнения движения), так и в случае с распространением волн (волновые уравнения движения), мы имеем дело не с простым “отскакиванием” от зеркала, а с *прохождением* сквозь само зеркало в другой мир, т.е. в *зазеркалье.*

В *мире зазеркалья* все частицы имеют отрицательные массы и частоты и движутся (с точки зрения наблюдателя в нашем мире) из будущего в прошлое. При этом волновая форма материи нашего мира не влияет на события в зазеркалье, и волновая форма материи из зазеркалья не влияет на события в нашем мире. Наоборот, корпускулярная форма материи (частицы) нашего мира может оказывать влияние на события в зазеркалье, и частицы материи зазеркалья могут влиять на события нашего мира. Полная изоляция нашего мира от зазеркалья (то есть отсутствие взаимного влияния частиц из обоих миров) реализуется при очевидном условии $D_k^i\mathrm{v}^k = -A_{k\cdot}^{\cdot i}\mathrm{v}^k$, при котором дополнительный член в корпускулярных уравнения движения равен нулю. Это происходит, в частности, когда $D_k^i = 0$ и $A_{k\cdot}^{\cdot i} = 0$, т.е. при полном отсутствии деформации и вращения пространства тела отсчета.

До сих пор мы рассматривали движения частиц только вдоль

неизотропных траекторий, где $ds^2 = c^2 d\tau^2 - d\sigma^2 > 0$, и вдоль изотропных (светоподобных) траекторий, где $ds^2 = 0$ и $c^2 d\tau^2 = d\sigma^2 \neq 0$. Кроме того, в предыдущей работе [19] мы рассмотрели траектории третьего типа, для которых, кроме $ds^2 = 0$, выполняются более строгие условия $c^2 d\tau^2 = d\sigma^2 = 0$. Тогда

$$d\tau = \left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\mathrm{w} + v_i u^i\right)\right] dt = 0\,, \tag{1.67}$$

$$d\sigma^2 = h_{ik}\, dx^i dx^k = 0\,. \tag{1.68}$$

Такие траектории мы называем *полностью вырожденными* или *нуль-траекториями*, т.к. с точки зрения обычного досветового наблюдателя вдоль них равны нулю интервал наблюдаемого времени и наблюдаемый трехмерный интервал. Можно также показать, что вдоль нуль-траекторий детерминант фундаментального метрического тензора риманова пространства равен нулю, т.е. $g = 0$. В римановом пространстве по определению $g < 0$, т.е. метрика является строго невырожденной. Следовательно нуль-траектории лежат за пределами риманова пространства. Пространство с полностью вырожденной метрикой мы будем называть *нуль-пространством*, а частицы, движущиеся по траекториям в этом пространстве, будем называть *нуль частицами*.

Физические условия полного вырождения пространства-времени получаются из формул (1.67, 1.68)

$$\mathrm{w} + v_i u^i = c^2, \tag{1.69}$$

$$g_{ik}\, u^i u^k = c^2 \left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2. \tag{1.70}$$

Соответственно, масса нуль-частиц M, включающая физические условия вырождения, отличается от релятивистской массы m обычных частиц невырожденного пространства-времени и имеет вид

$$M = \frac{m}{1 - \frac{1}{c^2}\left(\mathrm{w} + v_i u^i\right)}\,, \tag{1.71}$$

т.е. представляет собой отношение двух величин, каждая из которых при вырождении метрики равна нулю, но их отношение не равно нулю*.

---

*Аналогичная ситуация имеет место для безмассовых частиц, т.к. при $\mathrm{v}^2 = c^2$ величины $m_0 = 0$ и $\sqrt{1 - \mathrm{v}^2/c^2} = 0$, но их отношение не равно нулю $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \mathrm{v}^2/c^2}} \neq 0$.

Корпускулярная и волновая формы динамического вектора нуль-частиц имеют вид

$$P^{\alpha}=\frac{M}{c}\frac{dx^{\alpha}}{dt}\,,\qquad P_{\alpha}=\frac{\hbar}{c}\frac{\partial\psi}{\partial x^{\alpha}}\,. \tag{1.72}$$

Тогда корпускулярная форма хронометрически инвариантных динамических уравнений движения в нуль-пространстве имеет вид

$$MD_{ik}u^{i}u^{k}=0\,, \tag{1.73}$$

$$\frac{d}{dt}\left(Mu^{i}\right)+M\Delta^{i}_{nk}u^{n}u^{k}=0\,. \tag{1.74}$$

Волновая форма этих уравнений

$$D^{m}_{k}u^{k}\frac{{}^{*}\partial\psi}{\partial x^{m}}=0\,, \tag{1.75}$$

$$\frac{d}{dt}\left(h^{ik}\frac{{}^{*}\partial\psi}{\partial x^{k}}\right)+h^{mn}\Delta^{i}_{mk}u^{k}\frac{{}^{*}\partial\psi}{\partial x^{n}}=0\,. \tag{1.76}$$

Уравнение эйконала для нуль-частиц имеет вид

$$h^{ik}\frac{{}^{*}\partial\psi}{\partial x^{i}}\frac{{}^{*}\partial\psi}{\partial x^{k}}=0 \tag{1.77}$$

и представляет собой уравнение стоячей волны (информационное кольцо). Таким образом, с точки зрения обычного досветового наблюдателя, все нуль-пространство заполнено системой стоячих волн (нуль-частиц), т.е. *голограммой*. Кроме того, в нуль-пространстве наблюдаемое время имеет одно и то же значение для любых двух событий (1.67). Это означает, что с точки зрения обычного наблюдателя скорость нуль-частиц бесконечна, т.е. нуль-частицы могут мгновенно переносить информацию из одной точки нашего обычного мира в другую, осуществляя *дальнодействие* и являются носителями какого-то особого вида взаимодействия, природа которого, возможно, прояснится при будущих исследованиях.

§1.4 Негеодезическое движение частиц. Постановка задачи

Итак, при свободном движении частицы (движение вдоль геодезических линий) абсолютная производная динамического вектора частицы (четырехмерного вектора импульса) равна нулю, и его квадрат сохраняется вдоль траектории движения, т.е. параллельный перенос осуществляется в смысле Леви-Чивита.

При несвободном (негеодезическом) движении частицы абсолют-

ная производная ее четырехмерного импульса не равна нулю. Однако в этом случае равна нулю абсолютная производная от суммы четырехмерного импульса частицы P^{α} и вектора импульса L^{α}, приобретаемого частицей из-за ее взаимодействия с внешним полем или полями, которые отклоняют ее движение от геодезической линии. В принципе можно осуществлять параллельный перенос суперпозиции скольких угодно векторов [1]. Таким образом, для построения динамических уравнений негеодезического движения частиц необходимо, прежде всего, определить возмущающие поля негравитационной природы.

Естественно, внешнее поле будет взаимодействовать с частицей, отклоняя ее от геодезической линии, только в том случае, если эта частица обладает физическим свойством того же рода, что и внешнее поле. На сегодняшний день, известны три фундаментальных физических свойства частиц, не сводящиеся ни к каким другим. Это *масса* частицы, *электрический заряд* и *спин*. Если фундаментальность первых двух свойств не вызывала сомнений, то в первые годы после опытов О. Штерна и В. Герлаха (1921) и их интерпретации С. Гаудсмитом и Г. Уленбеком (1925) спин электрона интерпретировался как его собственный момент импульса, вызванный вращением вокруг своей оси. Однако эксперименты последующих десятилетий, в частности, открытие спина и у других элементарных частиц, показали ошибочность представления о частицах со спином, как о быстро вращающихся волчках. Спин оказался таким же фундаментальным свойством частиц, как масса и заряд, хотя он имеет размерность момента импульса и при взаимодействиях проявляется в виде собственного вращательного момента частицы. Гравитационное поле в настоящее время геометризовано. В теории хронометрических инвариантов гравитационно-инерциальная сила и гравитационный потенциал (1.38) получены как функции только геометрических свойств самого пространства. Поэтому при движении частицы в псевдоримановом пространстве мы фактически рассматриваем ее движение в гравитационном поле. Однако, можно ли выразить через геометрические характеристики пространства электромагнитную силу и потенциал, до сих пор неизвестно. Поэтому электромагнитное поле пока не геометризовано и вводится в пространство-время как отдельное тензорное поле (поле тензора Максвелла).

На данный момент основные уравнения электромагнитной теории получены в общековариантном виде. Несмотря на это, конкретные задачи из-за сложности вычислений тензора энергии-импульса электромагнитного поля в псевдоримановом пространстве обычно

решают или для каких-то частных случаев или в галилеевой системе отсчета пространства Минковского.

В рамках этой теории заряженная частица получает от электромагнитного поля четырехмерный импульс $\frac{e}{c^2}A^\alpha$, где A^α четырехмерный потенциал электромагнитного поля и e заряд частицы [10,20]. Суммируя этот дополнительный импульс с собственным вектором импульса частицы и осуществляя параллельный перенос, мы получим общековариантные динамические уравнения движения заряженных частиц. Сложнее дело обстоит для частицы со спином. Чтобы вычислить импульс, сообщаемый частице за счет ее спина, необходимо определить внешнее поле, взаимодействующее со спином как с фундаментальным свойством частицы. Первоначально эту задачу рассматривали только методами квантовой механики (уравнения Дирака, 1928). Геометрическими методами Общей Теории Относительности эту проблему одними из первых исследовал А. Папапетру, затем — совместно с Е. Кориналдези [21, 22]. В основе их подхода было представление о частицах вообще как о механических монополях и диполях. С такой точки зрения обычная массовая частица — *механический монополь*. Это частица, которую можно представить в виде двух масс, вращающихся вокруг общего центра тяжести (*механический диполь*). Таким образом, опираясь на представление о частице со спином как о вращающемся волчке, можно (в некотором приближение) рассматривать ее в виде механического диполя, центр тяжести которого лежит под поверхностью частицы. Затем Папапетру и Кориналдези рассмотрели движение механического диполя в псевдоримановом пространстве с метрикой Шварцшильда, т.е. в очень частном случае, когда вращение пространства равно нулю и его метрика стационарна (тензор скоростей деформации равен нулю).

Безусловно, метод, предложенный Папапетру, заслуживает внимания, но у него есть существенный недостаток. Разработанный еще в 40-е годы, он полностью основан на представлении о частице со спином как о быстро вращающемся волчке, что не соответствует экспериментальным данным последних десятилетий*.

Существует и другой способ решить задачу о движении частицы со спином. В римановом пространстве фундаментальный метрический тензор является симметричным $g_{\alpha\beta}=g_{\beta\alpha}$. Тем не менее

*Действительно, если представить себе электрон в виде шарика с радиусом $r_e = 2.8\times10^{-13}$ см, то линейная скорость его спинового вращения на поверхности составит $u=\frac{\hbar}{2m_0 r_e}=2\times10^{11}$ см/сек, т.е. почти в 70 раз больше скорости света. Однако эксперименты показывают, что таких скоростей в электроне нет.

можно построить такое пространство, в котором метрический тензор имеет произвольную форму $g_{\alpha\beta} \neq g_{\beta\alpha}$ (геометрия такого пространства будет нееримановой). Тогда в метрическом тензоре можно выделить антисимметричную часть, не равную нулю*. Соответствующие добавки получаются также в символах Кристоффеля $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ (1.2) и в тензоре кривизны Римана-Кристоффеля $R_{\alpha\beta\mu\nu}$. Результатом этих добавок является то, что при переносе по замкнутому контуру вектор не приходит в начальную точку, т.е. траектория переноса закручивается наподобие спирали. Такое пространство называют пространством с кручением. В этом пространстве можно рассмотреть спиновое вращение частицы как перенос вектора вращения по контуру ее поверхности, генерирующий локальное поле кручения пространства. Однако у этого метода также есть существенные недостатки. Во-первых, при $g_{\alpha\beta} \neq g_{\beta\alpha}$ функции компонент с разным порядком индексов могут быть самыми разнообразными. Эти функции необходимо как-то фиксировать, фактически задавая конкретное поле кручения, что резко сужает область решений, позволяя строить уравнения движения только для ряда частных случаев. Во-вторых, этот метод полностью основан на предположении о физической природе спина как о локальном поле кручения, вызванном переносом вектора вращения частицы по контуру. А это, в свою очередь, опять-таки подразумевает представление о частице со спином как о вращающемся волчке конечного радиуса (как и в методе Папапетру), что не соответствует экспериментальным данным.

Тем не менее нет сомнений, что дополнительный импульс, сообщаемый частице со спином, можно построить геометрическими методами Общей Теории Относительности. Сложив его с собственным динамическим вектором частицы (воздействие гравитационного поля) и осуществив параллельный перенос, мы получим общековариантные динамические уравнения движения частицы со спином†.

---

*Вообще, в любом тензоре 2-го и более высокого ранга можно выделить симметричную и антисимметричную части. Например, для тензора 2-го ранга $g_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(g_{\alpha\beta} + g_{\beta\alpha}\right) + \frac{1}{2}\left(g_{\alpha\beta} - g_{\beta\alpha}\right) = S_{\alpha\beta} + N_{\alpha\beta}$ где $S_{\alpha\beta}$ симметричная часть и $N_{\alpha\beta}$ антисимметричная часть тензора. Так как метрический тензор риманова пространства симметричен $(g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha})$, то его антисимметричная часть равна нулю.

†Мы писали эти строки в середине 1990-х годов, в первом издании этой книги. В 2007 году новый оригинальный подход к описанию частицы со спином был предложен Индрану Суэндро [23, 24] на основе его представлений о спине как о элементарном вихре самого пространства. Этот подход, будучи чисто геометрическим, более близок к идеологии Эйнштейна (геометризация материи и взаимодействий), чем подход через лагранжиан действия, предложенный в Главе 4 этой книги.

После того, как нам станут известны общековариантные динамические уравнения движения частиц с электрическим зарядом и спином, их необходимо спроецировать на время и на пространство сопутствующей системы отсчета и выразить через физические наблюдаемые характеристики пространства отсчета. В результате мы получим хронометрически инвариантные (физические наблюдаемые) динамические уравнения негеодезического движения частиц. Таким образом, задача, которую нам предстоит решить в этой книге, состоит из следующих этапов. Во-первых, необходимо построить хронометрически инвариантную теорию электромагнитного поля в псевдоримановом пространстве и на ее базе вывести хронометрически инвариантные динамические уравнения движения заряженной частицы. Решению этой задачи посвящена третья глава нашей книги. Далее необходимо построить теорию движения частицы со спином. Мы будем решать эту задачу в самом общем виде, полагая спин одним из фундаментальных свойств материи (как ее масса или заряд). Подробное исследование в четвертой главе покажет, что со спином взаимодействует поле неголономности пространства, сообщая частице дополнительный импульс. Там же мы получим хронометрически инвариантные динамические уравнения движения для частицы со спином. В пятой главе мы рассмотрим наблюдаемые проекции уравнений Эйнштейна. На их основе будут исследованы свойства физического вакуума и их проявления в космологии.

Но прежде чем приступить к этим исследованиям, мы считаем необходимым изложить четырехмерный тензорный анализ в терминах наблюдаемых физических величин. В оригинальных работах Зельманова он был разработан достаточно, но изложен весьма фрагментарно, что не позволяло читателю, незнакомому ранее с этим математическим аппаратом, освоить его самостоятельно. Поэтому мы включили в книгу следующую главу, с которой рекомендуем ознакомиться всем, кто собирается использовать математический аппарат хронометрических инвариантов в своих теоретических исследованиях. Хотя для общего понимания книги это не строго обязательно.

Глава 2 Основы тензорной алгебры и анализа в терминах физических наблюдаемых величин

§2.1 Тензоры и тензорная алгебра

Рассмотрим некоторое пространство (необязательно метрическое) и в нем произвольную систему координат x^{α}. Пусть в некоторой области данного пространства существует объект G, заданный n функциями f_n от координат x^{α}, и известен закон преобразования, по которому можно вычислить эти n функций в любой другой системе координат $\tilde{x}^{\alpha}$ данного пространства. Тогда G представляет собой *геометрический объект*, который в системе координат x^{α} имеет осевые компоненты $f_n\left(x^{\alpha}\right)$ и в любой другой системе координат $\tilde{x}^{\alpha}$ имеет компоненты $\tilde{f}_n\left(\tilde{x}^{\alpha}\right)$.

Тензорным объектом (*тензором*) нулевого ранга называется геометрический объект φ, преобразующийся по закону

$$\tilde{\varphi} = \varphi \, \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \tilde{x}^{\alpha}} \,, \tag{2.1}$$

где индекс пробегает по очереди номера всех координатных осей (такую форму записи называют *покомпонентной*, или *тензорной*). Тензор нулевого ранга имеет всего одну компоненту и иначе называется *скаляром*. В пространстве скаляр — это точка, характеризующаяся некоторым числом. Соответственно, скалярное поле есть множество точек пространства, объединенных некоторым общим свойством. Например, масса материальной точки представляет собой скаляр, тогда как распределение массы в газе (как множество точек пространства) образует скалярное поле*.

Контравариантным тензором 1-го ранга называется геометрический объект A^{α}, компоненты которого преобразуются по закону

$$\tilde{A}^{\alpha} = A^{\mu} \, \frac{\partial \tilde{x}^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \,. \tag{2.2}$$

---

*Алгебраически запись тензора и тензорного поля не отличаются: поле тензора записывается, как и сам тензор, в точке пространства, но при этом подразумевается его присутствие и в других точках данной области пространства.

Геометрически это n-мерный вектор. Например, элементарный вектор смещения dx^α является контравариантным тензором 1-го ранга. Контравариантный тензор 2-го ранга $A^{\alpha\beta}$ есть геометрический объект, компоненты которого преобразуются следующим образом

$$\tilde{A}^{\alpha\beta} = A^{\mu\nu} \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial x^\nu} \,. \tag{2.3}$$

Геометрически это площадка (параллелограмм), образованный двумя векторами. Поэтому контравариантный тензор 2-го ранга иногда называют *бивектором*.

Аналогично, контравариантные тензоры высшего ранга имеют вид

$$\tilde{A}^{\alpha\dots\sigma} = A^{\mu\dots\tau} \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \cdots \frac{\partial \tilde{x}^\sigma}{\partial x^\tau} \,. \tag{2.4}$$

Ковариантный тензор 1-го ранга A_α представляет собой геометрический объект, преобразующийся по закону

$$\tilde{A}_\alpha = A_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\alpha} \,. \tag{2.5}$$

В частности, ковариантным тензором 1-го ранга является градиент скалярного поля какого-либо инварианта, например φ, т.е. величина $A_\alpha = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha}$. То есть, т.к. для инварианта $\tilde{\varphi} = \varphi$, то

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{x}^\alpha} = \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\alpha} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\alpha} \,. \tag{2.6}$$

Ковариантным тензором 2-го ранга $A_{\alpha\beta}$ называется геометрический объект, закон преобразования которого выглядит следующим образом

$$\tilde{A}_{\alpha\beta} = A_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\beta} \,. \tag{2.7}$$

Ковариантные тензоры высшего ранга преобразуются по закону

$$\tilde{A}_{\alpha\dots\sigma} = A_{\mu\dots\tau} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\alpha} \cdots \frac{\partial x^\tau}{\partial \tilde{x}^\sigma} \,. \tag{2.8}$$

Смешанными тензорами называют такие тензоры 2-го ранга и выше, у которых имеются и верхние и нижние индексы. Так, смешанный симметричный тензор A^α_β есть геометрический объект, преобразующийся по закону

$$\tilde{A}^\alpha_\beta = A^\mu_\nu \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\beta} \,. \tag{2.9}$$

Тензорные объекты существуют как в метрических, так и в неметрических пространствах, где невозможно установить расстояние между двумя любыми точками*. Число компонент тензора равно a^n где a размерность тензора и n его ранг. Так, четырехмерный тензор нулевого ранга имеет 1 компоненту, тензор 1-го ранга имеет 4 компоненты, у тензора 2-го ранга 16 компонент и так далее. Однако индексы, т.е. осевые компоненты, могут иметь не только тензоры, но и другие геометрические объекты. Таким образом, если мы видим какую-либо величину, записанную в покомпонентном виде, это еще не означает, что она является тензором. Практически, чтобы узнать, является объект тензором или нет, необходимо знать выражение для данного объекта в какой-либо системе координат и преобразовать его в любую другую систему координат. Например, являются ли тензорами коэффициенты связности пространства, т.е. символы Кристоффеля? Выяснить это можно, найдя их значения в другой (тильдованной) системе координат

$$\widetilde{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu} = \tilde{g}^{\alpha\sigma}\,\widetilde{\Gamma}_{\mu\nu,\sigma}\,, \quad \widetilde{\Gamma}_{\mu\nu,\sigma} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\tilde{g}_{\mu\sigma}}{\partial\tilde{x}^{\nu}} + \frac{\partial\tilde{g}_{\nu\sigma}}{\partial\tilde{x}^{\mu}} - \frac{\partial\tilde{g}_{\mu\nu}}{\partial\tilde{x}^{\sigma}}\right) \tag{2.10}$$

через значения в нетильдованной системе координат. Фундаментальный метрический тензор, как и любой другой ковариантный тензор 2-го ранга, преобразуется по закону

$$\tilde{g}_{\mu\sigma} = g_{\varepsilon\tau}\,\frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial\tilde{x}^{\mu}}\,\frac{\partial x^{\tau}}{\partial\tilde{x}^{\sigma}}\,. \tag{2.11}$$

Так как $g_{\varepsilon\tau}$ зависит от нетильдованных координат, то его производная по тильдованным координатам (также функции нетильдованных координат) равна

$$\frac{\partial g_{\varepsilon\tau}}{\partial\tilde{x}^{\nu}} = \frac{\partial g_{\varepsilon\tau}}{\partial x^{\rho}}\,\frac{\partial x^{\rho}}{\partial\tilde{x}^{\nu}}\,. \tag{2.12}$$

Тогда первый член в скобках (2.10) имеет вид

$$\frac{\partial\tilde{g}_{\mu\sigma}}{\partial\tilde{x}^{\nu}} = \frac{\partial g_{\varepsilon\tau}}{\partial x^{\rho}}\,\frac{\partial x^{\rho}}{\partial\tilde{x}^{\nu}}\,\frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial\tilde{x}^{\mu}}\,\frac{\partial x^{\tau}}{\partial\tilde{x}^{\sigma}} + g_{\varepsilon\tau}\left(\frac{\partial x^{\tau}}{\partial\tilde{x}^{\sigma}}\,\frac{\partial^2 x^{\varepsilon}}{\partial\tilde{x}^{\nu}\partial\tilde{x}^{\mu}} + \frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial\tilde{x}^{\mu}}\,\frac{\partial^2 x^{\tau}}{\partial\tilde{x}^{\nu}\partial\tilde{x}^{\sigma}}\right). \tag{2.13}$$

*В неметрических пространствах, как известно, расстояние между точками не может быть измерено. Вернее, там просто не существует такого параметра пространства как “расстояние”. Это находится в сильном противоречии с метрическими пространствами. В теориях пространства-времени-материи, таких как Общая Теория Относительности и ее расширения, мы рассматриваем метрические пространства, т.к. в основе всех этих теорий лежат *измерения* промежутков времени и отрезков пространства, что было бы просто бессмысленным в каком-либо неметрическом пространстве.

Аналогично, вычисляя остальные члены тильдованных символов Кристоффеля (2.10), после перестановок свободных индексов получаем

$$\widetilde{\Gamma}_{\mu\nu,\sigma} = \Gamma_{\varepsilon\rho,\tau}\,\frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial \tilde{x}^{\mu}}\frac{\partial x^{\rho}}{\partial \tilde{x}^{\nu}}\frac{\partial x^{\tau}}{\partial \tilde{x}^{\sigma}} + g_{\varepsilon\tau}\,\frac{\partial x^{\tau}}{\partial \tilde{x}^{\sigma}}\frac{\partial^2 x^{\varepsilon}}{\partial \tilde{x}^{\mu}\partial \tilde{x}^{\nu}}\,, \tag{2.14}$$

$$\widetilde{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu} = \Gamma^{\gamma}_{\varepsilon\rho}\,\frac{\partial \tilde{x}^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}}\frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial \tilde{x}^{\mu}}\frac{\partial x^{\rho}}{\partial \tilde{x}^{\nu}} + \frac{\partial \tilde{x}^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}}\frac{\partial^2 x^{\gamma}}{\partial \tilde{x}^{\mu}\partial \tilde{x}^{\nu}}\,. \tag{2.15}$$

Отсюда видно, что коэффициенты связности пространства (символы Кристоффеля) преобразуются не как тензоры, т.е. тензорами не являются. Тензоры можно записывать в виде матриц. Однако на практике такая форма записи наглядна лишь для тензоров 1-го ранга (однорядные матрицы) и 2-го ранга (плоские матрицы). Например, элементарный четырехмерный тензор смещения

$$dx^{\alpha} = \left(dx^0,\, dx^1,\, dx^2,\, dx^3\right) \tag{2.16}$$

и четырехмерный фундаментальный метрический тензор

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}. \tag{2.17}$$

Тензор 3-его ранга представляет собой объемную матрицу. Запись компонентов тензоров высших рангов в виде матриц еще более проблематична.

Теперь перейдем к тензорной алгебре — разделу тензорного исчисления, в котором рассматриваются алгебраические операции над тензорами. Складывать (или вычитать) можно только однотипные тензоры одного и того же ранга, у которых индексы занимают одинаковое положение. При *сложении* двух однотипных тензоров ранга n получается новый тензор такого же типа и ранга, компоненты которого суть сумма компонент слагаемых тензоров. Например,

$$A^{\alpha} + B^{\alpha} = D^{\alpha}, \qquad A^{\alpha}_{\beta} + B^{\alpha}_{\beta} = D^{\alpha}_{\beta}\,. \tag{2.18}$$

Перемножать можно не только однотипные, но и вообще любые тензоры любых рангов. При внешнем умножении тензоров ранга n и m получается тензор ранга $n+m$

$$A_{\alpha\beta}B_{\gamma} = D_{\alpha\beta\gamma}\,, \qquad A_{\alpha}B^{\beta\gamma} = D^{\beta\gamma}_{\alpha}. \tag{2.19}$$

Свертыванием называется умножение тензоров одного ранга, при котором индексы совпадают. В результате свертывания тензорных величин по всем индексам получается скаляр

$$A_\alpha B^\alpha = C\,, \qquad A^\gamma_{\alpha\beta} B^{\alpha\beta}_\gamma = D\,. \tag{2.20}$$

Часто при умножении тензоров свертка происходит не по всем индексам. Такое умножение называется *внутренним*, подразумевая свертку части индексов внутри произведения

$$A_{\alpha\sigma} B^\sigma = D_\alpha\,, \qquad A^\gamma_{\alpha\sigma} B^{\beta\sigma}_\gamma = D^\beta_\alpha\,. \tag{2.21}$$

С помощью внутреннего произведения геометрических объектов можно выяснить, являются ли они тензорами или нет. Для этого существует так называемая *теорема частного*:

Теорема частного

Если $B^{\sigma\beta}$ тензор и его внутреннее произведение с некоторым геометрическим объектом $A\,(\alpha,\sigma)$ есть тензор $D\,(\alpha,\beta)$

$$A\,(\alpha,\sigma)\,B^{\sigma\beta} = D\,(\alpha,\beta)\,, \tag{2.22}$$

то данный объект $A\,(\alpha,\sigma)$ также является тензором [12].

Согласно этой теореме, если при внутреннем умножении какого-либо объекта $A_{\alpha\sigma}$ на тензор $B^{\sigma\beta}$ получается тензор D^β_α

$$A_{\alpha\sigma} B^{\sigma\beta} = D^\beta_\alpha\,, \tag{2.23}$$

то объект $A_{\alpha\sigma}$ является тензором. Или, если внутреннее умножение некоторого объекта A^α_σ на тензор $B^{\sigma\beta}$ дает тензор $D^{\alpha\beta}$

$$A^{\alpha\cdot}_{\cdot\sigma} B^{\sigma\beta} = D^{\alpha\beta}, \tag{2.24}$$

то объект $A^{\alpha\cdot}_{\cdot\sigma}$ есть тензор.

Геометрические свойства метрического пространства определяются его фундаментальным метрическим тензором $g_{\alpha\beta}$, который может поднимать и опускать индексы у объектов метрического пространства*. Например,

$$g_{\alpha\beta} A^\beta = A_\alpha\,, \qquad g^{\mu\nu} g^{\sigma\rho} A_{\mu\nu\sigma} = A^\rho. \tag{2.25}$$

*В римановом пространстве метрика имеет квадратичную форму $ds^2 = g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha dx^\beta$ (*риманова метрическая форма*), и, соответственно, метрический тензор является тензором 2-го ранга $g_{\alpha\beta}$.

В римановом пространстве смешанный фундаментальный метрический тензор g_{α}^{β} равен единичному тензору $g_{\alpha}^{\beta} = g_{\alpha\sigma} g^{\sigma\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta}$. Диагональные члены единичного тензора равны единице, а все остальные равны нулю. С помощью единичного тензора можно производить замену индексов

$$\delta_{\alpha}^{\beta} A_{\beta} = A_{\alpha}\,, \qquad \delta_{\mu}^{\nu} \delta_{\rho}^{\sigma} A^{\mu\rho} = A^{\nu\sigma}. \tag{2.26}$$

Свертка тензора 2-го ранга с фундаментальным метрическим тензором образует скаляр, который называют *следом тензора*

$$A = g^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} = A_{\sigma}^{\sigma}\,. \tag{2.27}$$

Например, след фундаментального метрического тензора четырехмерного риманова пространства

$$g_{\alpha\beta}\, g^{\alpha\beta} = g_{\sigma}^{\sigma} = g_{0}^{0} + g_{1}^{1} + g_{2}^{2} + g_{3}^{3} = \delta_{0}^{0} + \delta_{1}^{1} + \delta_{2}^{2} + \delta_{3}^{3} = 4 \tag{2.28}$$

и равен числу координатных осей.

Физический наблюдаемый метрический тензор h_{ik} (1.27) в трехмерном пространстве обладает свойствами фундаментального метрического тензора $g_{\alpha\beta}$. Поэтому с его помощью можно поднимать, опускать и производить замену индексов у хронометрически инвариантных величин. В частности, можно вычислять квадраты трехмерных векторов. Соответственно, след трехмерного тензора образуется путем его свертки с наблюдаемым метрическим тензором. Так, след тензора скоростей деформации пространства D_{ik} (1.40) есть скаляр

$$h^{ik} D_{ik} = D_{m}^{m}\,, \tag{2.29}$$

обозначающий абсолютную величину скорости относительного расширения элементарного объема пространства. Конечно, в кратком очерке невозможно полностью изложить такой обширный предмет, как алгебра тензоров. Впрочем, в этом и нет необходимости. Тензорная алгебра достаточно подробно описана во многих чисто математических изданиях, не связанных с Общей Теорией Относительности. Тем не менее множество специфических подробностей этого предмета, занимающих большую часть математических учебников, в теоретической физике не используются. Поэтому мы стремились дать только общее представление о тензорах, необходимое для работы с этой книгой. По этой же причине сюда не вошли, в частности, вес тензоров и другие понятия, которые в дальнейших расчетах не использовались.

§ 2.2 Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов A^{α} и B^{α} в четырехмерном псевдоримановом пространстве называется величина

$$g_{\alpha\beta}\, A^{\alpha}B^{\beta} = A_{\alpha}B^{\alpha} = A_0B^0 + A_iB^i. \tag{2.30}$$

Скалярное произведение является сверткой, т.к. при умножении векторов одновременно происходит свертывание всех индексов. Поэтому в результате скалярного умножения двух векторов (тензоров 1-го ранга) всегда получается скаляр (тензор нулевого ранга). Если оба вектора совпадают, то их скалярное произведение

$$g_{\alpha\beta}\, A^{\alpha}A^{\beta} = A_{\alpha}A^{\alpha} = A_0A^0 + A_iA^i \tag{2.31}$$

представляет собой квадрат вектора A^{α}. Тогда длина вектора A^{α} есть скаляр

$$A = |A^{\alpha}| = \sqrt{g_{\alpha\beta}A^{\alpha}A^{\beta}}. \tag{2.32}$$

Так как четырехмерное псевдориманово пространство имеет знакопеременную сигнатуру, то длина четырехмерного вектора может быть вещественной, мнимой и нулевой. Векторы ненулевой (вещественной или мнимой) длины называют *неизотропными*. Векторы нулевой длины называют *изотропными*. Изотропные векторы касательны к траекториям распространения светоподобных частиц (изотропным траекториям).

В трехмерном евклидовом пространстве скалярное произведение двух векторов есть скаляр, величина которого равна произведению длин перемножаемых векторов на косинус угла между ними

$$A_iB^i = |\,A^i\,|\,|\,B^i\,|\cos\left(A^i; B^i\right). \tag{2.33}$$

В принципе, в каждой точке риманова пространства можно построить касательное плоское пространство, базисные векторы которого будут касательны базисным векторам риманова пространства в точке касания. Тогда метрика касательного плоского пространства будет метрикой риманова пространства в этой точке. Поэтому данная формула справедлива и в римановом пространстве, если рассмотреть угол между координатными линиями и заменить латинские (трехмерные) индексы на греческие. Отсюда видно, что скалярное произведение двух векторов равно нулю, когда векторы взаимно ортогональны. Иначе говоря, скалярное умножение геометрически представляет собой проецирование одного вектора на другой. Если же векторы совпадают, то вектор проецируется сам на себя, а результат такого проецирования есть квадрат его длины.

Обозначим физические наблюдаемые компоненты векторов A^{α} и B^{α} следующим образом

$$a=\frac{A_0}{\sqrt{g_{00}}}\,,\qquad a^i=A^i, \tag{2.34}$$

$$b=\frac{B_0}{\sqrt{g_{00}}}\,,\qquad b^i=B^i. \tag{2.35}$$

Тогда их остальные компоненты примут вид

$$A^0=\frac{a+\frac{1}{c}\,v_i a^i}{1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}}\,,\qquad A_i=-\,a_i-\frac{a}{c}\,v_i\,, \tag{2.36}$$

$$B^0=\frac{b+\frac{1}{c}\,v_i b^i}{1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}}\,,\qquad B_i=-\,b_i-\frac{b}{c}\,v_i\,. \tag{2.37}$$

Подставляя значения наблюдаемых компонент в выражения для $A_{\alpha}B^{\alpha}$ и $A_{\alpha}A^{\alpha}$, получаем

$$A_{\alpha}B^{\alpha}=ab-a_ib^i=ab-h_{ik}\,a^ib^k, \tag{2.38}$$

$$A_{\alpha}A^{\alpha}=a^2-a_ia^i=a^2-h_{ik}\,a^ia^k. \tag{2.39}$$

Из этих выражений видно, что квадрат длины вектора есть разность квадратов длин его проекций на время и на пространство. При этом длина вектора является вещественной или мнимой в зависимости от того, какая из проекций “длиннее”. Если же обе проекции равны, то длина вектора равна нулю и он является изотропным. Таким образом изотропный вектор в равной мере принадлежит и времени и пространству. Равенство временной и пространственной проекций также означает, что вектор ортогонален самому себе. Если “длиннее” временная проекция, то он становится вещественным. Если “ длиннее” проекция на пространство, то вектор становится мнимым.

В качестве примера скалярного произведения четырехмерного вектора на самого себя можно привести квадрат длины пространственно-временного интервала

$$ds^2=g_{\alpha\beta}\,dx^{\alpha}dx^{\beta}=dx_{\alpha}dx^{\alpha}=dx_0dx^0+dx_idx^i. \tag{2.40}$$

В терминах физических наблюдаемых величин его можно записать следующим образом

$$ds^2=c^2d\tau^2-dx_idx^i=c^2d\tau^2-h_{ik}\,dx^idx^k=c^2d\tau^2-d\sigma^2. \tag{2.41}$$

Длина интервала $ds = \sqrt{g_{\alpha\beta}\,dx^{\alpha}dx^{\beta}}$ получается вещественной, мнимой или нулевой в зависимости от того, является ли ds времениподобным $c^2d\tau^2 > d\sigma^2$, пространственноподобным $c^2d\tau^2 < d\sigma^2$ или изотропным $c^2d\tau^2 = d\sigma^2$ (светоподобные траектории).

§ 2.3 Векторное произведение векторов. Антисимметричные тензоры и псевдотензоры

Векторным произведением двух векторов A^{α} и B^{α} называется тензор 2-го ранга $V^{\alpha\beta}$, получающийся в результате их внешнего умножения по правилу

$$V^{\alpha\beta} = \left[A^{\alpha}; B^{\beta}\right] = \frac{1}{2}\left(A^{\alpha}B^{\beta} - A^{\beta}B^{\alpha}\right) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} A^{\alpha} & A^{\beta} \\ B^{\alpha} & B^{\beta} \end{vmatrix}. \tag{2.42}$$

Как видите, здесь не все равно, в какой последовательности подставлять перемножаемые векторы, т.е. имеет значение последовательность записи тензорных индексов. Поэтому тензоры, образованные в результате векторного умножения, являются *антисимметричными тензорами.* Для антисимметричного тензора $V^{\alpha\beta} = -V^{\beta\alpha}$ и индексы при перемещении как бы оставляют за собой "зарезервированные" места в виде точек $g_{\alpha\sigma}V^{\sigma\beta} = V_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta}$, показывая тем самым, откуда был перемещен тот или иной индекс. У симметричных тензоров "резервировать" места передвигаемых индексов нет необходимости, т.к. их последовательность значения не имеет. В частности, фундаментальный метрический тензор является симметричным тензором $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$, тогда как тензор кривизны пространства $R^{\alpha\cdots}_{\cdot\beta\gamma\delta}$ симметричен относительно перестановок по парам индексов и антисимметричен внутри каждой пары индексов. Естественно, что симметричными или антисимметричными могут быть тензоры, начиная со 2-го ранга и выше. Все диагональные компоненты любого антисимметричного тензора равны нулю, например

$$V^{\alpha\alpha} = \left[A^{\alpha}; B^{\alpha}\right] = \frac{1}{2}\left(A^{\alpha}B^{\alpha} - A^{\alpha}B^{\alpha}\right) = 0\,. \tag{2.43}$$

В трехмерном евклидовом пространстве абсолютная величина векторного произведения двух векторов определяется как площадь образованного ими параллелограмма и равна произведению модулей образующихся векторов на синус угла между ними

$$V^{ik} = |\,A^i\,|\,|\,B^k\,|\sin\left(A^i; B^k\right). \tag{2.44}$$

Это означает, что векторное произведение двух векторов (антисимметричный тензор 2-го ранга) представляет собой ориентирован-

ную в пространстве площадку, ориентация которой задается направлением обхода образующих векторов. Свертка антисимметричного тензора с любым симметричным тензором равна нулю

$$V_{\alpha\beta}A^{\alpha}A^{\beta}=V_{00}A^{0}A^{0}+V_{0i}A^{0}A^{i}+V_{i0}A^{i}A^{0}+V_{ik}A^{i}A^{k}=0 \qquad (2.45)$$

из-за его свойств.

Физическими наблюдаемыми компонентами антисимметричного тензора 2-го ранга $V^{\alpha\beta}$, согласно теории хронометрических инвариантов (1.32), являются величины

$$\frac{V_{0\cdot}^{\cdot i}}{\sqrt{g_{00}}}=-\frac{V_{\cdot 0}^{i\cdot}}{\sqrt{g_{00}}}=\frac{1}{2}\left(a\,b^{i}-b\,a^{i}\right), \qquad (2.46)$$

$$V^{ik}=\frac{1}{2}\left(a^{i}b^{k}-a^{k}b^{i}\right), \qquad (2.47)$$

выраженные через наблюдаемые компоненты образующих его векторов A^{α} (2.34) и B^{α} (2.35). Из-за того, что у антисимметричного тензора диагональные компоненты равны нулю, третья наблюдаемая компонента $\frac{V_{00}}{g_{00}}$ (1.32) также равна нулю.

Наблюдаемые компоненты V^{ik}, являющиеся пространственными проекциями $V^{\alpha\beta}$, — это аналоги векторного произведения векторов в трехмерном пространстве. Величина $\frac{V_{0\cdot}^{\cdot i}}{\sqrt{g_{00}}}$, представляющая собой пространственно-временную (смешанную) проекцию тензора $V^{\alpha\beta}$, не имеет аналогов среди компонент обычного трехмерного векторного произведения. Квадрат антисимметричного тензора 2-го ранга, выраженный через наблюдаемые компоненты образующих векторов, выглядит следующим образом

$$V_{\alpha\beta}V^{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(a_{i}a^{i}b_{k}b^{k}-a_{i}b^{i}a_{k}b^{k}\right)+aba_{i}b^{i}-\frac{1}{2}\left(a^{2}b_{i}b^{i}-b^{2}a_{i}a^{i}\right). \qquad (2.48)$$

Последние два члена этого выражения содержат величины a (2.34) и b (2.35), представляющие собой проекции перемножаемых векторов A^{α} и B^{α} на время, и поэтому не имеют аналогов при векторном умножении в трехмерном евклидовом пространстве. Антисимметричность тензорного поля характеризуется эталонным антисимметричным тензором. В галилеевой системе отсчета* такими эталонами являются тензоры Леви-Чивита: для четырехмерных

*Галилеева система отсчета — такая, которая не вращается, не деформируется и свободно падает в плоском пространстве-времени (пространстве Минковского). Нетрудно убедиться, что в этом случае линии времени прямолинейны и трехмерные координатные оси также прямолинейны.

величин это ***четырехмерный совершенно антисимметричный единичный тензор*** $e^{\alpha\beta\mu\nu}$, и для трехмерных величин ***трехмерный совершенно антисимметричный единичный тензор*** e^{ikm}. Компоненты этих тензоров, у которых все индексы различны, равны $+1$ или -1 в зависимости от числа перестановок индексов. Все остальные компоненты, т.е. такие, у которых хотя бы два индекса совпадают, равны нулю. Причем при используемой нами сигнатуре $(+---)$ не равные нулю контравариантные компоненты отличаются по знаку от соответствующих им ковариантных компонент*. Так, например, в пространстве Минковского всегда можно показать, что

$$\left.\begin{aligned} g_{\alpha\sigma}g_{\beta\rho}g_{\mu\tau}g_{\nu\gamma}e^{\sigma\rho\tau\gamma} = g_{00}g_{11}g_{22}g_{33}e^{0123} = -\,e^{0123} \\ g_{i\alpha}g_{k\beta}g_{m\gamma}e^{\alpha\beta\gamma} = g_{11}g_{22}g_{33}e^{123} = -\,e^{123} \end{aligned}\right\} \tag{2.49}$$

из-за условий $g_{00}=1$ и $g_{11}=g_{22}=g_{33}=-1$. Вот компоненты четырехмерного совершенно антисимметричного тензора $e^{\alpha\beta\mu\nu}$

$$\left.\begin{aligned} e^{0123}=+1,\quad e^{1023}=-1,\quad e^{1203}=+1,\quad e^{1230}=-1 \\ e_{0123}=-1,\quad e_{1023}=+1,\quad e_{1203}=-1,\quad e_{1230}=+1 \end{aligned}\right\} \tag{2.50}$$

и трехмерного совершенно антисимметричного тензора e^{ikm}

$$\left.\begin{aligned} e^{123}=+1,\quad e^{213}=-1,\quad e^{231}=+1 \\ e_{123}=-1,\quad e_{213}=+1,\quad e_{231}=-1 \end{aligned}\right\}. \tag{2.51}$$

Так как выбор знака первой компоненты произволен (важна только совершенная антисимметричность тензора), то вполне можно положить $e^{0123}=-1$ и $e^{123}=-1$. Соответственно, изменятся и остальные компоненты. Вообще четырехмерный тензор $e^{\alpha\beta\mu\nu}$ связан с трехмерным тензором e^{ikm} соотношением $e^{0ikm}=e^{ikm}$.

При умножении четырехмерного антисимметричного единичного тензора $e^{\alpha\beta\mu\nu}$ на самого себя получается обычный тензор 8-го ранга, не равные нулю компоненты которого имеют вид

$$e^{\alpha\beta\mu\nu}e_{\sigma\tau\rho\gamma} = -\begin{vmatrix} \delta^{\alpha}_{\sigma} & \delta^{\alpha}_{\tau} & \delta^{\alpha}_{\rho} & \delta^{\alpha}_{\gamma} \\ \delta^{\beta}_{\sigma} & \delta^{\beta}_{\tau} & \delta^{\beta}_{\rho} & \delta^{\beta}_{\gamma} \\ \delta^{\mu}_{\sigma} & \delta^{\mu}_{\tau} & \delta^{\mu}_{\rho} & \delta^{\mu}_{\gamma} \\ \delta^{\nu}_{\sigma} & \delta^{\nu}_{\tau} & \delta^{\nu}_{\rho} & \delta^{\nu}_{\gamma} \end{vmatrix}. \tag{2.52}$$

*При сигнатуре $(-+++)$ это справедливо только для четырехмерного тензора $e^{\alpha\beta\mu\nu}$. Компоненты трехмерного тензора e^{ikm} будут аналогичны по знаку соответствующим компонентам e_{ikm}.

Остальные свойства тензора $e^{\alpha\beta\mu\nu}$ получаются из предыдущего путем упрощения (свертки) индексов

$$e^{\alpha\beta\mu\nu}e_{\sigma\tau\rho\nu} = -\begin{pmatrix} \delta^{\alpha}_{\sigma} & \delta^{\alpha}_{\tau} & \delta^{\alpha}_{\rho} \\ \delta^{\beta}_{\sigma} & \delta^{\beta}_{\tau} & \delta^{\beta}_{\rho} \\ \delta^{\mu}_{\sigma} & \delta^{\mu}_{\tau} & \delta^{\mu}_{\rho} \end{pmatrix}, \qquad (2.53)$$

$$e^{\alpha\beta\mu\nu}e_{\sigma\tau\mu\nu} = -2\begin{pmatrix} \delta^{\alpha}_{\sigma} & \delta^{\alpha}_{\tau} \\ \delta^{\beta}_{\sigma} & \delta^{\beta}_{\tau} \end{pmatrix} = -2\left(\delta^{\alpha}_{\sigma}\delta^{\beta}_{\tau} - \delta^{\beta}_{\sigma}\delta^{\alpha}_{\tau}\right), \qquad (2.54)$$

$$e^{\alpha\beta\mu\nu}e_{\sigma\beta\mu\nu} = -6\delta^{\alpha}_{\sigma}\,, \quad e^{\alpha\beta\mu\nu}e_{\alpha\beta\mu\nu} = -6\delta^{\alpha}_{\alpha} = -24. \qquad (2.55)$$

При умножении трехмерного антисимметричного единичного тензора e^{ikm} на самого себя получается обычный тензор 6-го ранга

$$e^{ikm}e_{rst} = \begin{pmatrix} \delta^{i}_{r} & \delta^{i}_{s} & \delta^{i}_{t} \\ \delta^{k}_{r} & \delta^{k}_{s} & \delta^{k}_{t} \\ \delta^{m}_{r} & \delta^{m}_{s} & \delta^{m}_{t} \end{pmatrix}. \qquad (2.56)$$

Остальные свойства тензора e^{ikm} можно записать следующим образом

$$e^{ikm}e_{rsm} = -\begin{pmatrix} \delta^{i}_{r} & \delta^{i}_{s} \\ \delta^{k}_{r} & \delta^{k}_{s} \end{pmatrix} = \delta^{i}_{s}\delta^{k}_{r} - \delta^{i}_{r}\delta^{k}_{s}\,, \qquad (2.57)$$

$$e^{ikm}e_{rkm} = 2\delta^{i}_{r}\,, \quad e^{ikm}e_{ikm} = 2\delta^{i}_{i} = 6. \qquad (2.58)$$

Совершенно антисимметричный единичный тензор определяет для тензорного объекта соответствующий *псевдотензор*, обозначаемый звездочкой. Так, четырехмерным скаляру, вектору и тензорам 2-го, 3-го и 4-го рангов соответствуют четырехмерные псевдотензоры следующих рангов

$$\left.\begin{aligned} V^{*\alpha\beta\mu\nu} = e^{\alpha\beta\mu\nu}V, \quad V^{*\alpha\beta\mu} = e^{\alpha\beta\mu\nu}V_{\nu}\,, \quad V^{*\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,e^{\alpha\beta\mu\nu}V_{\mu\nu} \\ V^{*\alpha} = \frac{1}{6}\,e^{\alpha\beta\mu\nu}V_{\beta\mu\nu}\,, \quad V^{*} = \frac{1}{24}\,e^{\alpha\beta\mu\nu}V_{\alpha\beta\mu\nu} \end{aligned}\right\}, \qquad (2.59)$$

где псевдотензор 1-го ранга $V^{*\alpha}$ иногда называют *псевдовектором*, а псевдотензор нулевого ранга V^{*} называют *псевдоскаляром* (по аналогии с обычными вектором и скаляром). При этом тензор и соответствующий ему псевдотензор называются *дуальными* друг другу,

подчеркивая тем самым их генетическое родство. Аналогично, трехмерным тензорам соответствуют трехмерные псевдотензоры

$$\left.\begin{aligned} V^{*ikm} &= e^{ikm}V, \qquad V^{*ik} = e^{ikm}V_m \\ V^{*i} &= \frac{1}{2}\,e^{ikm}V_{km}\,, \quad V^{*} = \frac{1}{6}\,e^{ikm}V_{ikm} \end{aligned}\right\}. \tag{2.60}$$

Псевдотензоры получили свое название из-за того, что они, в отличии от обычных тензоров, при отражении относительно одной из осей не меняются. Например, при отражении относительно оси абсцисс $x^1 = -\tilde{x}^1$, $x^2 = \tilde{x}^2$, $x^3 = \tilde{x}^3$ компонента антисимметричного тензора V_{ik}, ортогональная оси x^1, равна $\widetilde{V}_{23} = -V_{23}$, тогда как дуальная ей компонента псевдовектора V^{*i} получается равной

$$\left.\begin{aligned} V^{*1} &= \frac{1}{2}\,e^{1km}V_{km} = \frac{1}{2}\bigl(e^{123}V_{23} + e^{132}V_{32}\bigr) = V_{23} \\ \widetilde{V}^{*1} &= \frac{1}{2}\,\tilde{e}^{1km}\widetilde{V}_{km} = \frac{1}{2}\,e^{k1m}\widetilde{V}_{km} = \frac{1}{2}\bigl(e^{213}\widetilde{V}_{23} + e^{312}\widetilde{V}_{32}\bigr) = V_{23} \end{aligned}\right\}. \tag{2.61}$$

Так как четырехмерный антисимметричный тензор 2-го ранга и дуальный ему псевдовектор имеют один и тот же ранг, то их свертка есть псевдоскаляр

$$V_{\alpha\beta}V^{*\alpha\beta} = V_{\alpha\beta}\,e^{\alpha\beta\mu\nu}V_{\mu\nu} = e^{\alpha\beta\mu\nu}B_{\alpha\beta\mu\nu} = B^{*}. \tag{2.62}$$

Квадрат четырехмерного псевдотензора 2-го ранга $V^{*\alpha\beta}$ и квадрат трехмерного псевдовектора V^{*i}, выраженные через дуальные им антисимметричные тензоры 2-го ранга, равны

$$V_{*\alpha\beta}V^{*\alpha\beta} = e_{\alpha\beta\mu\nu}V^{\mu\nu}e^{\alpha\beta\rho\sigma}V_{\rho\sigma} = -24V_{\mu\nu}V^{\mu\nu}, \tag{2.63}$$

$$V_{*i}V^{*i} = e_{ikm}V^{km}e^{ipq}V_{pq} = 6V_{km}V^{km}. \tag{2.64}$$

В неоднородном и анизотропном псевдоримановом пространстве невозможно ввести галилееву систему отсчета и эталон антисимметричности тензороного поля будет зависеть от неоднородности и анизотропии самого пространства, устанавливаемых фундаментальным метрическим тензором. В этом случае эталонный антисимметричный тензор представляет собой *четырехмерный совершенно антисимметричный дискриминантный тензор*

$$E^{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{e^{\alpha\beta\mu\nu}}{\sqrt{-g}}\,, \qquad E_{\alpha\beta\mu\nu} = e_{\alpha\beta\mu\nu}\sqrt{-g}\,. \tag{2.65}$$

Показать это можно следующим образом. Преобразование единичного совершенно антисимметричного тензора из галилеевой (нетильдованной) системы отсчета в произвольную (тильдованную) систему отсчета имеет вид

$$\tilde{e}_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial \tilde{x}^{\alpha}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial \tilde{x}^{\beta}} \frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial \tilde{x}^{\mu}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial \tilde{x}^{\nu}} e_{\sigma\gamma\varepsilon\tau} = J e_{\alpha\beta\mu\nu}\,, \tag{2.66}$$

где $J = \det\left\| \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \tilde{x}^{\sigma}} \right\|$ называется *якобианом преобразования* (детерминант матрицы Якоби — матрицы, составленной из производных нетильдованных координат по тильдованным координатам)

$$J = \det \begin{Vmatrix} \frac{\partial x^0}{\partial \tilde{x}^0} & \frac{\partial x^0}{\partial \tilde{x}^1} & \frac{\partial x^0}{\partial \tilde{x}^2} & \frac{\partial x^0}{\partial \tilde{x}^3} \\ \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^0} & \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^1} & \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^2} & \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^0} & \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^2} & \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial \tilde{x}^0} & \frac{\partial x^3}{\partial \tilde{x}^1} & \frac{\partial x^3}{\partial \tilde{x}^2} & \frac{\partial x^3}{\partial \tilde{x}^3} \end{Vmatrix}. \tag{2.67}$$

Так как тензор $g_{\alpha\beta}$ преобразуется по закону

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \tilde{x}^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \tilde{x}^{\beta}} g_{\mu\nu}\,, \tag{2.68}$$

то его детерминант в тильдованной системе отсчета

$$\tilde{g} = \det \left\| \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \tilde{x}^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \tilde{x}^{\beta}} g_{\mu\nu} \right\| = J^2 g\,. \tag{2.69}$$

Поскольку в галилеевой (нетильдованной) системе отсчета

$$g = \det \|g_{\alpha\beta}\| = \det \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix} = -1, \tag{2.70}$$

то $J^2 = -\tilde{g}^2$. Обозначая $\tilde{e}_{\alpha\beta\mu\nu}$ в произвольной системе отсчета как $E_{\alpha\beta\mu\nu}$ и записывая метрический тензор в обычном нетильдованном виде, получаем $E_{\alpha\beta\mu\nu} = e_{\alpha\beta\mu\nu}\sqrt{-g}$ (2.65). Точно так же получаются преобразования и для компонент $E^{\alpha\beta\mu\nu}$, так как для них $g = \tilde{g}\tilde{J}^2$, где $\tilde{J} = \det\left\| \frac{\partial \tilde{x}^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \right\|$.

Однако дискриминантный тензор $E^{\alpha\beta\mu\nu}$ не является физически наблюдаемой величиной. Наблюдаемым эталоном антисимметричности тензорных полей является *трехмерный хронометрически инвариантный дискриминантный тензор*

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} = h^{\alpha}_{\mu} h^{\beta}_{\nu} h^{\gamma}_{\rho} b_{\sigma} E^{\sigma\mu\nu\rho} = b_{\sigma} E^{\sigma\alpha\beta\gamma}, \tag{2.71}$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = h^{\mu}_{\alpha} h^{\nu}_{\beta} h^{\rho}_{\gamma} b^{\sigma} E_{\sigma\mu\nu\rho} = b^{\sigma} E_{\sigma\alpha\beta\gamma}\,, \tag{2.72}$$

который в сопутствующей системе отсчета ($b^i = 0$) с учетом соотношения $\sqrt{-g} = \sqrt{h}\,\sqrt{g_{00}}$ принимает вид

$$\varepsilon^{ikm} = b_0 E^{0ikm} = \sqrt{g_{00}}\, E^{0ikm} = \frac{e^{ikm}}{\sqrt{h}}\,, \tag{2.73}$$

$$\varepsilon_{ikm} = b^0 E_{0ikm} = \frac{E_{0ikm}}{\sqrt{g_{00}}} = e_{ikm}\sqrt{h}\,. \tag{2.74}$$

С его помощью можно образовывать хронометрически инвариантные (физические наблюдаемые) псевдотензоры. Например, свертка ε^{ikm} и трехмерного хронометрически инвариантного антисимметричного тензора угловой скорости вращения пространства A_{ik} (1.36) есть наблюдаемый псевдовектор угловой скорости вращения пространства $\Omega^{*i} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{ikm} A_{km}$.

§ 2.4 Абсолютный дифференциал и производная по направлению

В геометрии *дифференциалом* какой-либо функции называется ее приращение в бесконечно близких точках с координатами x^{α} и $x^{\alpha} + dx^{\alpha}$. Соответственно, *абсолютным дифференциалом* в пространстве n измерений называют приращение n-мерной величины в бесконечно близких точках n-мерных координат данного пространства.

В случае непрерывных функций, с которыми, как правило, мы имеем дело на практике, их приращения в бесконечно близких точках являются бесконечно малыми. Однако для определения бесконечно малого приращения тензорной величины не может быть использовано понятие простой “разности” между ее значениями в точках x^{α} и $x^{\alpha} + dx^{\alpha}$, т.к. тензорная алгебра не определяет соотношения между значениями тензора в различных точках пространства. Это соотношение может быть установлено только с помощью законов преобразования тензоров из одной системы отсчета в другую. Поэтому, в частности, дифференциальные операторы и результаты применения их к тензорам сами также должны быть тензорами. Так, абсолютный дифференциал от какой-либо тензорной величины является тензором того же ранга, что и эта величина. Абсолютный дифференциал от скаляра φ есть скаляр, определяемый следующим выражением

$$\mathrm{D}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x^{\alpha}}\, dx^{\alpha}. \tag{2.75}$$

В сопутствующей системе отсчета ($b^i = 0$) он принимает вид

$$\mathrm{D}\varphi = \frac{{}^*\partial\varphi}{\partial t}\,d\tau + \frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^i}\,dx^i, \tag{2.76}$$

откуда видно, что, кроме трехмерного наблюдаемого дифференциала, здесь присутствует добавочный член, учитывающий зависимость абсолютного смещения $\mathrm{D}\varphi$ от хода физического наблюдаемого времени $d\tau$.

Абсолютный дифференциал контравариантного вектора A^α, выраженный через оператор абсолютного дифференцирования ∇ (набла), имеет вид

$$\mathrm{D}A^\alpha = \nabla_\sigma\, A^\alpha dx^\sigma = \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\sigma}\,dx^\sigma + \Gamma^\alpha_{\mu\sigma}A^\mu dx^\sigma = dA^\alpha + \Gamma^\alpha_{\mu\sigma}A^\mu dx^\sigma, \tag{2.77}$$

где $\nabla_\sigma\, A^\alpha$ абсолютная производная A^α по координате x^σ, и d обозначает обычный дифференциал

$$\nabla_\sigma\, A^\alpha = \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\sigma} + \Gamma^\alpha_{\mu\sigma}A^\mu, \tag{2.78}$$

$$d = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\,dx^\alpha. \tag{2.79}$$

Выражение абсолютного дифференциала через физические наблюдаемые величины эквивалентно проецированию его общековариантной формы на линии времени и пространственное сечение наблюдателя в сопутствующей системе отсчета

$$T = b_\alpha\,\mathrm{D}A^\alpha = \frac{g_{0\alpha}\mathrm{D}A^\alpha}{\sqrt{g_{00}}}\,, \qquad B^i = h^i_\alpha \mathrm{D}A^\alpha. \tag{2.80}$$

Обозначив наблюдаемые компоненты вектора A^α как

$$\varphi = \frac{A_0}{\sqrt{g_{00}}}\,, \qquad q^i = A^i, \tag{2.81}$$

получим его остальные компоненты

$$A_0 = \varphi\left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right), \quad A^0 = \frac{\varphi + \frac{1}{c}\,v_i q^i}{1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}}\,, \quad A_i = -q_i - \frac{\varphi}{c}\,v_i\,. \tag{2.82}$$

Учитывая, что обычный дифференциал в хронометрически инвариантной форме имеет вид

$$d = \frac{{}^*\partial}{\partial t}\,d\tau + \frac{{}^*\partial}{\partial x^i}\,dx^i\,, \tag{2.83}$$

и подставляя в T и B^i (2.79) в сопутствующей системе отсчета (1.41–1.46), получаем хронометрически инвариантные (наблюдаемые) проекции на время и на пространство абсолютного дифференциала вектора A^α

$$T = b_\alpha \mathrm{D}A^\alpha = d\varphi + \frac{1}{c}\left(-F_i q^i d\tau + D_{ik}q^i dx^k\right), \tag{2.84}$$

$$\begin{gathered} B^i = h^i_\sigma \mathrm{D}A^\sigma = dq^i + \left(\frac{\varphi}{c}\,dx^k + q^k d\tau\right)\left(D^i_k + A^{\cdot i}_{k\cdot}\right) - \\ - \frac{\varphi}{c}\,F^i d\tau + \Delta^i_{mk}\,q^m dx^k. \end{gathered} \tag{2.85}$$

В дальнейшем при построении уравнений движения нам также понадобятся хронометрически инвариантные уравнения абсолютной производной вектора вдоль направления, касательного к траектории движения. Геометрически *производная по направлению* от некоторой функции есть ее изменение по отношению к элементарному перемещению вдоль заданного направления. *Абсолютной производной по направлению* в пространстве n измерений называют изменение n-мерной величины относительно элементарного n-мерного интервала вдоль заданного направления. Так, абсолютная производная скалярной функции φ вдоль направления, определяемого кривой $x^\alpha = x^\alpha(\rho)$, где ρ параметр вдоль данной кривой, представляет собой "скорость" изменения данной функции

$$\frac{\mathrm{D}\varphi}{d\rho} = \frac{d\varphi}{d\rho}\,. \tag{2.86}$$

В сопутствующей системе отсчета она принимает вид

$$\frac{\mathrm{D}\varphi}{d\rho} = \frac{{}^*\partial\varphi}{\partial t}\frac{d\tau}{d\rho} + \frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^i}\frac{dx^i}{d\rho}\,. \tag{2.87}$$

Абсолютная производная вектора A^α вдоль направления, заданного кривой $x^\alpha = x^\alpha(\rho)$ равна

$$\frac{\mathrm{D}A^\alpha}{d\rho} = \nabla_\sigma A^\alpha \frac{dx^\sigma}{d\rho} = \frac{dA^\alpha}{d\rho} + \Gamma^\alpha_{\mu\sigma}A^\mu \frac{dx^\sigma}{d\rho}\,. \tag{2.88}$$

Физические наблюдаемые компоненты величины $\frac{\mathrm{D}A^\alpha}{d\rho}$, т.е. проекции ее на время и на пространство в сопутствующей системе отсчета, имеют вид

$$b_\alpha \frac{\mathrm{D}A^\alpha}{d\rho} = \frac{d\varphi}{d\rho} + \frac{1}{c}\left(-F_i q^i \frac{d\tau}{d\rho} + D_{ik}q^i \frac{dx^k}{d\rho}\right), \tag{2.89}$$

$$h_\sigma^i \frac{\mathrm{D}A^\sigma}{d\rho} = \frac{dq^i}{d\rho} + \left(\frac{\varphi}{c}\frac{dx^k}{d\rho} + q^k \frac{d\tau}{d\rho}\right)\left(D_k^i + A_{k\cdot}^{\cdot i}\right) - \\ - \frac{\varphi}{c} F^i \frac{d\tau}{d\rho} + \Delta_{mk}^i q^m \frac{dx^k}{d\rho}\,. \tag{2.90}$$

Фактически эти проекции представляют собой "отвлеченные" хронометрически инвариантные уравнения движения. Стоит нам только определить его наблюдаемые компоненты и, подставив их в данные уравнения, привести подобные члены, как мы сразу получим уравнения движения, выраженные через физические наблюдаемые величины.

§ 2.5 Абсолютная дивергенция и ротор

Дивергенцией какого-либо тензорного поля называется его "перепад" в направлении координатных осей. Соответственно, *абсолютной дивергенцией* n-мерного тензорного поля называется его дивергенция в n-мерном пространстве. Дивергенция есть результат свертывания тензора поля с оператором абсолютного дифференцирования набла ∇. Дивергенция векторного поля есть скаляр

$$\nabla_\sigma A^\sigma = \frac{\partial A^\sigma}{\partial x^\sigma} + \Gamma_{\sigma\mu}^\sigma A^\mu. \tag{2.91}$$

Дивергенция поля тензора 2-го ранга является вектором и имеет вид

$$\nabla_\sigma F^{\sigma\alpha} = \frac{\partial F^{\sigma\alpha}}{\partial x^\sigma} + \Gamma_{\sigma\mu}^\sigma F^{\alpha\mu} + \Gamma_{\sigma\mu}^\alpha F^{\sigma\mu}, \tag{2.92}$$

причем можно показать, что величина $\Gamma_{\sigma\mu}^\sigma$ имеет вид

$$\Gamma_{\sigma\mu}^\sigma = \frac{\partial \ln\sqrt{-g}}{\partial x^\mu}\,. \tag{2.93}$$

Для этого воспользуемся определением символов Кристоффеля и запишем величину $\Gamma_{\sigma\mu}^\sigma$ подробно

$$\Gamma_{\sigma\mu}^\sigma = g^{\sigma\rho}\Gamma_{\mu\sigma,\rho} = \frac{1}{2}\, g^{\sigma\rho}\left(\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial g_{\sigma\rho}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\rho}\right). \tag{2.94}$$

Так как здесь σ и ρ свободные индексы, то их можно поменять местами. В результате этого после свертки с тензором $g^{\rho\sigma}$ первый и последний члены взаимно уничтожаются, и $\Gamma_{\sigma\mu}^\sigma$ принимает вид

$$\Gamma_{\sigma\mu}^\sigma = \frac{1}{2}\, g^{\rho\sigma}\frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu}\,. \tag{2.95}$$

Величины $g^{\rho\sigma}$ суть компоненты тензора, обратного тензору $g_{\rho\sigma}$. Поэтому каждая компонента матрицы $g^{\rho\sigma}$ равна

$$g^{\rho\sigma} = \frac{a^{\rho\sigma}}{g}\,, \qquad g = \det \| g_{\rho\sigma} \| \,, \tag{2.96}$$

где $a^{\rho\sigma}$ алгебраическое дополнение элемента матрицы с индексами $\rho\sigma$, равное числу $(-1)^{\rho+\sigma}$, умноженному на детерминант (определитель) матрицы, получаемой вычеркиванием σ и ρ из матрицы $g_{\rho\sigma}$. В результате мы имеем $a^{\rho\sigma} = g g^{\rho\sigma}$. Так как детерминант $g = \det \| g_{\rho\sigma} \|$ по определению равен

$$g = \sum_{\alpha_0 \dots \alpha_3} (-1)^{N(\alpha_0 \dots \alpha_3)}\, g_{0(\alpha_0)} g_{1(\alpha_1)} g_{2(\alpha_2)} g_{3(\alpha_3)}\,, \tag{2.97}$$

то величина dg примет вид $dg = a^{\rho\sigma} dg_{\rho\sigma} = g g^{\rho\sigma} dg_{\rho\sigma}$, или

$$\frac{dg}{g} = g^{\rho\sigma} dg_{\rho\sigma}\,. \tag{2.98}$$

Интегрируя левую часть, получаем $\ln(-g)$, т.к. детерминант g отрицателен, а логарифм существует только для положительной функции. Тогда $d\ln(-g) = \frac{dg}{g}$. Учитывая, что $(-g)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln(-g)$, получаем

$$d\ln\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\, g^{\rho\sigma} dg_{\rho\sigma}\,, \tag{2.99}$$

и $\Gamma^{\sigma}_{\sigma\mu}$ (2.95) принимает вид

$$\Gamma^{\sigma}_{\sigma\mu} = \frac{1}{2}\, g^{\rho\sigma} \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial \ln\sqrt{-g}}{\partial x^{\mu}}\,, \tag{2.100}$$

что и требовалось показать (2.93).

Теперь вычислим физические наблюдаемые компоненты дивергенции векторного поля (2.91) и поля тензора 2-го ранга (2.92). Выражение для дивергенции векторного поля A^{α} есть скаляр, поэтому величину $\nabla_{\sigma} A^{\sigma}$ нельзя спроецировать на время и на пространство, достаточно только выразить ее через хронометрически инвариантные (физические наблюдаемые) компоненты A^{α} и через наблюдаемые характеристики пространства отсчета. Кроме того, обычные операторы дифференцирования следует заменить на хронометрически инвариантные.

Примем обозначения φ и q^i для наблюдаемых компонент вектора A^{α} (2.81), и выразим через них остальные компоненты (2.82). Тогда, подставляя в (2.91) обычные операторы дифференцирования,

выраженные через хронометрически инвариантные операторы

$$\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\frac{\partial}{\partial t}=\frac{^*\partial}{\partial t}\,, \qquad \sqrt{g_{00}}=1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\,, \tag{2.101}$$

$$\frac{^*\partial}{\partial x^i}=\frac{\partial}{\partial x^i}+\frac{1}{c^2}\,v_i\frac{^*\partial}{\partial t}\,, \tag{2.102}$$

и учитывая, что $\sqrt{-g}=\sqrt{h}\,\sqrt{g_{00}}$, после вычислений получаем

$$\nabla_\sigma A^\sigma=\frac{1}{c}\left(\frac{^*\partial\varphi}{\partial t}+\varphi D\right)+\frac{^*\partial q^i}{\partial x^i}+q^i\,\frac{^*\partial\ln\sqrt{h}}{\partial x^i}-\frac{1}{c^2}\,F_i\,q^i. \tag{2.103}$$

Величина

$$\frac{^*\partial\ln\sqrt{h}}{\partial x^i}=\Delta^j_{ji} \tag{2.104}$$

представляет собой хронометрически инвариантные символы Кристоффеля Δ^k_{ji} (1.47), свернутые по двум индексам. Тогда, аналогично определению абсолютной дивергенции векторного поля (2.91), величина

$$\frac{^*\partial q^i}{\partial x^i}+q^i\,\frac{^*\partial\ln\sqrt{h}}{\partial x^i}=\frac{^*\partial q^i}{\partial x^i}+q^i\Delta^j_{ji}={}^*\nabla_i\,q^i \tag{2.105}$$

есть *хронометрически инвариантная дивергенция* вектора q^i. Соответственно, назовем *физической дивергенцией* вектора q^i хронометрически инвариантную величину

$${}^*\widetilde{\nabla}_i\,q^i={}^*\nabla_i\,q^i-\frac{1}{c^2}\,F_i\,q^i, \tag{2.106}$$

в которой дополнительный член учитывает тот факт, что темп течения времени на противоположных стенках элементарного объема различен. Действительно, при вычислении дивергенции берется элементарный объем пространства и вычисляется разность между объемами “субстанции”, входящей в него за элементарный промежуток времени и выходящей из него за этот же временной интервал (дивергенция означает расходимость). Но наличие гравитационно-инерциальной силы F^i (1.38) приводит к тому, что темп времени в разных точках пространства различен. Поэтому, если измерить длительность промежутков времени на противоположных стенках объема, то начало и конец этих промежутков на разных стенках объема получаются несинхронными, и их нельзя будет сравнить. При синхронизации часов на противоположных стенках объема получится

истинная картина, т.е. измеренная длительность этих промежутков времени окажется различной.

Окончательное выражение для $\nabla_\sigma A^\sigma$ примет вид

$$\nabla_\sigma A^\sigma = \frac{1}{c}\left(\frac{^*\partial\varphi}{\partial t} + \varphi D\right) + {}^*\widetilde{\nabla}_i\, q^i. \qquad (2.107)$$

Второй член этого выражения представляет собой физический наблюдаемый аналог обычной дивергенции в трехмерном пространстве. Первый член не имеет аналогов и состоит из двух частей: $\frac{^*\partial\varphi}{\partial t}$ есть изменение во времени временной проекции φ четырехмерного вектора A^α, величина $D\varphi$ является изменением во времени объема трехмерного тензорного поля q^i, т.к. след тензора скоростей деформации $D = h^{ik}D_{ik} = D_n^n$ есть скорость относительного расширения элементарного объема пространства отсчета.

Равенство $\nabla_\sigma A^\sigma = 0$, примененное к четырехмерному вектор-потенциалу A^α электромагнитного поля, есть условие Лоренца. В хронометрически инвариантном виде условие Лоренца выглядит следующим образом

$$^*\widetilde{\nabla}_i\, q^i = -\frac{1}{c}\left(\frac{^*\partial\varphi}{\partial t} + \varphi D\right). \qquad (2.108)$$

Теперь вычислим физические наблюдаемые компоненты дивергенции произвольного антисимметричного тензора $F^{\alpha\beta} = -F^{\beta\alpha}$ (в дальнейшем это пригодится при выводе хронометрически инвариантных уравнений Максвелла)

$$\nabla_\sigma F^{\sigma\alpha} = \frac{\partial F^{\sigma\alpha}}{\partial x^\sigma} + \Gamma^\sigma_{\sigma\mu}F^{\alpha\mu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\mu}F^{\sigma\mu} = \frac{\partial F^{\sigma\alpha}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial \ln\sqrt{-g}}{\partial x^\mu}\, F^{\alpha\mu}, \quad (2.109)$$

где второй член $\Gamma^\alpha_{\sigma\mu}F^{\sigma\mu}$ равен нулю из-за свертывания символов Кристоффеля $\Gamma^\alpha_{\sigma\mu}$, симметричных по нижним индексам, и антисимметричного тензора $F^{\sigma\mu}$.

Выражение $\nabla_\sigma F^{\sigma\alpha}$ является четырехмерным вектором, поэтому его хронометрически инвариантные (наблюдаемые) проекции имеют вид

$$T = b_\alpha \nabla_\sigma F^{\sigma\alpha}, \qquad B^i = h^i_\alpha \nabla_\sigma F^{\sigma\alpha} = \nabla_\sigma F^{i\alpha}. \qquad (2.110)$$

Обозначим хронометрически инвариантные (наблюдаемые) компоненты тензора $F^{\alpha\beta}$

$$E^i = \frac{F_{0\cdot}^{\cdot i}}{\sqrt{g_{00}}}\,, \qquad H^{ik} = F^{ik}, \qquad (2.111)$$

тогда его остальные, не равные нулю, компоненты, выраженные через наблюдаемые компоненты (2.111), имеют вид

$$F_{0\cdot}^{\cdot 0} = \frac{1}{c}\, v_k E^k, \qquad (2.112)$$

$$F_{k\cdot}^{\cdot 0} = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\left(E_i - \frac{1}{c}\, v_n H_{k\cdot}^{\cdot n} - \frac{1}{c^2}\, v_k v_n E^n\right), \qquad (2.113)$$

$$F^{0i} = \frac{E^i - \frac{1}{c}\, v_k H^{ik}}{\sqrt{g_{00}}}\,, \qquad F_{0i} = -\sqrt{g_{00}}\, E_i\,, \qquad (2.114)$$

$$F_{i\cdot}^{\cdot k} = -H_{i\cdot}^{\cdot k} - \frac{1}{c}\, v_i E^k, \quad F_{ik} = H_{ik} + \frac{1}{c}\left(v_i E_k - v_k E_i\right), \qquad (2.115)$$

и квадрат тензора $F^{\alpha\beta}$ равен

$$F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = H_{ik}H^{ik} - 2E_i E^i. \qquad (2.116)$$

Подставляя значения этих компонент в (2.110) и заменяя обычные операторы дифференцирования на хронометрически инвариантные операторы, после вычислений получаем

$$T = \frac{\nabla_\sigma F_{0\cdot}^{\cdot\sigma}}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{{}^*\partial E^i}{\partial x^i} + E^i\, \frac{{}^*\partial \ln\sqrt{h}}{\partial x^i} - \frac{1}{c}\, H^{ik}A_{ik}\,, \qquad (2.117)$$

$$B^i = \nabla_\sigma F^{\sigma i} = \frac{{}^*\partial H^{ik}}{\partial x^k} + H^{ik}\, \frac{{}^*\partial \ln\sqrt{h}}{\partial x^k} - \frac{1}{c^2}\, F_k H^{ik} - \frac{1}{c}\left(\frac{{}^*\partial E^i}{\partial t} + DE^i\right), \qquad (2.118)$$

где A_{ik} есть антисимметричный хронометрически инвариантный тензор неголономности пространства. Учитывая, что

$$\frac{{}^*\partial E^i}{\partial x^i} + E^i\, \frac{{}^*\partial \ln\sqrt{h}}{\partial x^i} = {}^*\nabla_i\, E^i \qquad (2.119)$$

есть хронометрически инвариантная дивергенция вектора E^i, и

$${}^*\nabla_k\, H^{ik} - \frac{1}{c^2}\, F_k H^{ik} = {}^*\widetilde{\nabla}_k\, H^{ik} \qquad (2.120)$$

есть физическая хронометрически инвариантная дивергенция тензора H^{ik}, получаем окончательные выражения для физических наблюдаемых проекций дивергенции произвольного антисимметричного тензора $F^{\alpha\beta}$

$$T = {}^*\nabla_i\, E^i - \frac{1}{c}\, H^{ik}A_{ik}\,, \qquad (2.121)$$

$$B^i = {}^*\widetilde{\nabla}_k H^{ik} - \frac{1}{c}\left(\frac{{}^*\partial E^i}{\partial t} + DE^i\right). \qquad (2.122)$$

Теперь вычислим физические наблюдаемые компоненты дивергенции псевдотензора $F^{*\alpha\beta}$, дуального данному антисимметричному тензору $F^{\alpha\beta}$,

$$F^{*\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,E^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\mu\nu}\,, \qquad F_{*\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,E_{\alpha\beta\mu\nu}F^{\mu\nu}. \qquad (2.123)$$

Обозначим наблюдаемые компоненты псевдотензора

$$H^{*i} = \frac{F_{0\cdot}^{*\cdot i}}{\sqrt{g_{00}}}\,, \qquad E^{*ik} = F^{*ik}, \qquad (2.124)$$

так как между этими величинами и наблюдаемыми компонентами антисимметричного тензора $F^{\alpha\beta}$ (2.111), в силу дуальности данных тензоров $F^{\alpha\beta}$ и $F^{*\alpha\beta}$, существуют очевидные соответствия $H^{*i}\!\sim\!H^{ik}$ и $E^{*ik}\sim E^i$.

Соответственно при

$$\frac{F_{0\cdot}^{*\cdot i}}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{ipq}H_{pq}\,, \qquad F^{*ik} = -\,\varepsilon^{ikp}E_p\,, \qquad (2.125)$$

остальные компоненты псевдотензора $F^{*\alpha\beta}$, выраженные через наблюдаемые компоненты дуального тензора $F^{\alpha\beta}$ (2.111), имеют следующий вид

$$F_{0\cdot}^{*\cdot 0} = \frac{1}{2c}\,v_k\,\varepsilon^{kpq}\left[H_{pq} + \frac{1}{c}\,(v_pE_q - v_qE_p)\right], \qquad (2.126)$$

$$\begin{gathered} F_{i\cdot}^{*\cdot 0} = \frac{1}{2\sqrt{g_{00}}}\left[\varepsilon_{i\cdot}^{\cdot pq}H_{pq} + \frac{1}{c}\,\varepsilon_{i\cdot}^{\cdot pq}\,(v_pE_q - v_qE_p) - \right. \\ \left. - \frac{1}{c^2}\,\varepsilon^{kpq}v_iv_kH_{pq} - \frac{1}{c^3}\,\varepsilon^{kpq}v_iv_k\,(v_pE_q - v_qE_p)\right], \end{gathered} \qquad (2.127)$$

$$F^{*0i} = \frac{1}{2\sqrt{g_{00}}}\,\varepsilon^{ipq}\left[H_{pq} + \frac{1}{c}\,(v_pE_q - v_qE_p)\right], \qquad (2.128)$$

$$F_{*0i} = \frac{1}{2}\sqrt{g_{00}}\,\varepsilon_{ipq}H^{pq}, \qquad (2.129)$$

$$F_{i\cdot}^{*\cdot k} = \varepsilon_{i\cdot}^{\cdot kp}E_p - \frac{1}{2c}\,v_i\,\varepsilon^{kpq}H_{pq} - \frac{1}{c^2}\,v_iv_m\,\varepsilon^{mkp}E_p\,, \qquad (2.130)$$

$$F_{*ik} = \varepsilon_{ikp}\left(E^p - \frac{1}{c}\,v_qH^{pq}\right), \qquad (2.131)$$

и его квадрат равен

$$F_{*\alpha\beta}F^{*\alpha\beta} = \varepsilon^{ipq}\left(E_p H_{iq} - E_i H_{pq}\right), \tag{2.132}$$

где ε^{ipq} трехмерный хронометрически инвариантный дискриминантный тензор (2.73, 2.74). Тогда наблюдаемые компоненты дивергенции псевдотензора $F^{*\alpha\beta}$ имеют вид

$$\frac{\nabla_\sigma F_{0\cdot}^{*\cdot\sigma}}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{{}^*\partial H^{*i}}{\partial x^i} + H^{*i}\frac{{}^*\partial \ln\sqrt{h}}{\partial x^i} - \frac{1}{c}\,E^{*ik}A_{ik}\,, \tag{2.133}$$

$$\begin{aligned}\nabla_\sigma F^{*\sigma i} = \frac{{}^*\partial E^{*ik}}{\partial x^i} + E^{*ik}\frac{{}^*\partial \ln\sqrt{h}}{\partial x^k} - \frac{1}{c^2}\,F_k E^{*ik} - \\ - \frac{1}{c}\left(\frac{{}^*\partial H^{*i}}{\partial t} + DH^{*i}\right),\end{aligned} \tag{2.134}$$

или, после выделения хронометрически инвариантной дивергенции ${}^*\nabla_i H^{*i}$ и также хронометрически инвариантной физической дивергенции ${}^*\widetilde{\nabla}_k E^{*ik}$, аналогично (2.119, 2.120), получаем

$$\frac{\nabla_\sigma F_{0\cdot}^{*\cdot\sigma}}{\sqrt{g_{00}}} = {}^*\nabla_i H^{*i} - \frac{1}{c}\,E^{*ik}A_{ik}\,, \tag{2.135}$$

$$\nabla_\sigma F^{*\sigma i} = {}^*\widetilde{\nabla}_k E^{*ik} - \frac{1}{c}\left(\frac{{}^*\partial H^{*i}}{\partial t} + DH^{*i}\right). \tag{2.136}$$

Помимо дивергенции вектора, антисимметричного тензора и псевдотензора 2-го ранга нам также необходимо знать наблюдаемые проекции дивергенции симметричного тензора 2-го ранга (в дальнейшем они понадобятся при выводе хронометрически инвариантных законов сохранения). Так как эти выражения были ранее получены Зельмановым, то мы просто приводим их по его публикациям. Обозначая наблюдаемые компоненты симметричного тензора $T^{\alpha\beta}$ как

$$\frac{T_{00}}{g_{00}} = \rho\,, \qquad \frac{T_0^i}{\sqrt{g_{00}}} = K^i, \qquad T^{ik} = N^{ik}, \tag{2.137}$$

согласно Зельманову, имеем

$$\frac{\nabla_\sigma T_0^\sigma}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{{}^*\partial\rho}{\partial t} + \rho D + D_{ik}N^{ik} + c\,{}^*\nabla_i K^i - \frac{2}{c}\,F_i K^i, \tag{2.138}$$

$$\begin{aligned}\nabla_\sigma T^{\sigma i} = c\,\frac{{}^*\partial K^i}{\partial t} + cDK^i + 2c\left(D_k^i + A_{k\cdot}^{\cdot i}\right)K^k + \\ + c^2\,{}^*\nabla_k N^{ik} - F_k N^{ik} - \rho F^i.\end{aligned} \tag{2.139}$$

Наряду с внутренним (скалярным) произведением тензора поля с оператором абсолютного дифференцирования набла ∇, являющимся дивергенцией данного тензорного поля, можно рассмотреть разность ковариантных производных тензорного поля. Эта величина называется *ротором* и геометрически представляет собой "вихрь" тензорного поля.

Абсолютным ротором называют вихрь n-мерного тензорного поля в n-мерном пространстве (хотя это обозначение, в отличие от абсолютной дивергенции, встречается очень редко). Ротор четырехмерного векторного поля A^{α} есть ковариантный антисимметричный тензор 2-го ранга, определяемый следующим образом*

$$F_{\mu\nu} = \nabla_{\mu} A_{\nu} - \nabla_{\nu} A_{\mu} = \frac{\partial A_{\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}}\,, \tag{2.140}$$

где $\nabla_{\mu} A_{\nu}$ абсолютная производная A_{ν} по координате x^{μ}

$$\nabla_{\mu} A_{\nu} = \frac{\partial A_{\nu}}{\partial x^{\mu}} - \Gamma^{\sigma}_{\nu\mu} A_{\sigma}\,. \tag{2.141}$$

Ротор, свернутый с четырехмерным совершенно антисимметричным дискриминантным тензором $E^{\alpha\beta\mu\nu}$ (2.65), образует соответствующий псевдотензор

$$F^{*\alpha\beta} = E^{\alpha\beta\mu\nu} \left(\nabla_{\mu} A_{\nu} - \nabla_{\nu} A_{\mu}\right) = E^{\alpha\beta\mu\nu} \left(\frac{\partial A_{\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right). \tag{2.142}$$

В электродинамике $F_{\mu\nu}$ (2.140) представляет собой четырехмерный (общековариантный) тензор электромагнитного поля, иначе называемый тензором Максвелла, и фактически является ротором четырехмерного потенциала A^{α} электромагнитного поля. Поэтому в дальнейшем нам потребуются выражения для наблюдаемых компонент четырехмерного ротора $F_{\mu\nu}$ и дуального ему псевдотензора $F^{*\alpha\beta}$, записанные через наблюдаемые компоненты образующего их четырехмерного вектора поля A^{α} (2.81).

Вычисляем компоненты ротора $F_{\mu\nu}$. При этом мы учитываем, что $F_{00} = F^{00} = 0$ как и для любого антисимметричного тензора. В результате после вычислений мы получаем

$$F_{0i} = \left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right) \left(\frac{\varphi}{c^2} F_i - \frac{{}^*\partial \varphi}{\partial x^i} - \frac{1}{c} \frac{{}^*\partial q_i}{\partial t}\right), \tag{2.143}$$

*Например §98 в книге П. К. Рашевского [18], хотя правильней называть истинным ротором (вихрем) поля не собственно антисимметричный тензор (2.140), а дуальный ему псевдотензор (2.142) как инвариант относительно отражения координатных осей.

$$F_{ik} = \frac{{}^*\partial q_i}{\partial x^k} - \frac{{}^*\partial q_k}{\partial x^i} + \frac{\varphi}{c}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x^k} - \frac{\partial v_k}{\partial x^i}\right) + \\ + \frac{1}{c}\left(v_i \frac{{}^*\partial \varphi}{\partial x^k} - v_k \frac{{}^*\partial \varphi}{\partial x^i}\right) + \frac{1}{c^2}\left(v_i \frac{{}^*\partial q_k}{\partial t} - v_k \frac{{}^*\partial q_i}{\partial t}\right), \tag{2.144}$$

$$F_{0\cdot}^{\cdot 0} = -\frac{\varphi}{c^3} v_k F^k + \frac{1}{c} v^k \left(\frac{{}^*\partial \varphi}{\partial x^k} + \frac{1}{c}\frac{{}^*\partial q_k}{\partial t}\right), \tag{2.145}$$

$$F_{k\cdot}^{\cdot 0} = -\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\left[\frac{\varphi}{c^2} F_k - \frac{{}^*\partial \varphi}{\partial x^k} - \frac{1}{c}\frac{{}^*\partial q_k}{\partial t} + \right. \\ + \frac{2\varphi}{c^2} v^m A_{mk} + \frac{1}{c^2} v_k v^m \left(\frac{{}^*\partial \varphi}{\partial x^m} + \frac{1}{c}\frac{{}^*\partial q_m}{\partial t}\right) - \\ \left. - \frac{1}{c} v^m \left(\frac{{}^*\partial q_m}{\partial x^k} - \frac{{}^*\partial q_k}{\partial x^m}\right) - \frac{\varphi}{c^4} v_k v_m F^m\right], \tag{2.146}$$

$$F_{k\cdot}^{\cdot i} = h^{im}\left(\frac{{}^*\partial q_m}{\partial x^k} - \frac{{}^*\partial q_k}{\partial x^m}\right) - \frac{1}{c} h^{im} v_k \frac{{}^*\partial \varphi}{\partial x^m} - \\ - \frac{1}{c^2} h^{im} v_k \frac{{}^*\partial q_m}{\partial t} + \frac{\varphi}{c^3} v_k F^i + \frac{2\varphi}{c} A_{k\cdot}^{\cdot i}, \tag{2.147}$$

$$F^{0k} = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\left[h^{km}\left(\frac{{}^*\partial \varphi}{\partial x^m} + \frac{1}{c}\frac{{}^*\partial q_m}{\partial t}\right) - \frac{\varphi}{c^2} F^k + \right. \\ \left. + \frac{1}{c} v^n h^{mk}\left(\frac{{}^*\partial q_n}{\partial x^m} - \frac{{}^*\partial q_m}{\partial x^n}\right) - \frac{2\varphi}{c^2} v_m A^{mk}\right], \tag{2.148}$$

$$\frac{F_{0\cdot}^{\cdot i}}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{g^{i\alpha} F_{0\alpha}}{\sqrt{g_{00}}} = h^{ik}\left(\frac{{}^*\partial \varphi}{\partial x^k} + \frac{1}{c}\frac{{}^*\partial q_k}{\partial t}\right) - \frac{\varphi}{c^2} F^i, \tag{2.149}$$

$$F^{ik} = g^{i\alpha} g^{k\beta} F_{\alpha\beta} = h^{im} h^{kn}\left(\frac{{}^*\partial q_m}{\partial x^n} - \frac{{}^*\partial q_n}{\partial x^m}\right) - \frac{2\varphi}{c} A^{ik}, \tag{2.150}$$

причем величины (2.149, 2.150) представляют собой физические наблюдаемые проекции ротора $F_{\mu\nu}$. Соответственно, наблюдаемые проекции дуального ему псевдотензора $F^{*\alpha\beta}$ имеют вид

$$\frac{F_{0\cdot}^{*\cdot i}}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{g_{0\alpha} F^{*\alpha i}}{\sqrt{g_{00}}} = \varepsilon^{ikm}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{{}^*\partial q_k}{\partial x^m} - \frac{{}^*\partial q_m}{\partial x^k}\right) - \frac{\varphi}{c} A_{km}\right], \tag{2.151}$$

$$F^{*ik} = \varepsilon^{ikm}\left(\frac{\varphi}{c^2} F_m - \frac{{}^*\partial \varphi}{\partial x^m} - \frac{1}{c}\frac{{}^*\partial q_m}{\partial t}\right), \tag{2.152}$$

где $F_{0\cdot}^{*\cdot i} = g_{0\alpha} F^{*\alpha i} = g_{0\alpha} E^{\alpha i\mu\nu} F_{\mu\nu}$ вычисляется с помощью готовых компонент ротора $F_{\mu\nu}$ (2.143–2.148).

§ 2.6 Операторы Лапласа и Даламбера

Оператором Лапласа называют трехмерный оператор дифференцирования

$$\Delta = \nabla\,\nabla = \nabla^2 = -g^{ik}\,\nabla_i\,\nabla_k\,. \tag{2.153}$$

Его обобщением в четырехмерном псевдоримановом пространстве является общековариантный оператор Даламбера

$$\Box = g^{\alpha\beta}\,\nabla_\alpha\,\nabla_\beta\ . \tag{2.154}$$

В пространстве Минковского оператор Даламбера выглядит следующим образом

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^1\partial x^1} + \frac{\partial^2}{\partial x^2\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^3\partial x^3}\,, \tag{2.155}$$

$$\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^1\partial x^1} - \frac{\partial^2}{\partial x^2\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^3\partial x^3} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\ , \tag{2.156}$$

где Δ оператор Лапласа (2.153).

Наша задача состоит в том, чтобы применить оператор Даламбера к скалярному и векторному полям в псевдоримановом пространстве и выразить результаты вычислений в хронометрически инвариантном виде. Вначале мы применим оператор Даламбера к четырехмерному полю скаляра φ, т.к. в этом случае выкладки существенно проще (абсолютная производная скалярного поля $\nabla_\alpha\varphi$ не содержит символов Кристоффеля и сводится к обычной производной)

$$\Box\varphi = g^{\alpha\beta}\,\nabla_\alpha\,\nabla_\beta\ \varphi = g^{\alpha\beta}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^\beta}\right) = g^{\alpha\beta}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}\,. \tag{2.157}$$

Компоненты фундаментального метрического тензора выразим через величины теории хронометрических инвариантов. Для компонент g^{ik} из (1.18) имеем $g^{ik} = -h^{ik}$. Величины g^{0i} получаются из выражения для вектора линейной скорости вращения пространства $v^i = -c\,g^{0i}\sqrt{g_{00}}$

$$g^{0i} = -\frac{1}{c\sqrt{g_{00}}}\,v^i. \tag{2.158}$$

Нулевую компоненту g^{00} можно найти из свойства фундаментального метрического тензора $g_{\alpha\sigma}g^{\beta\sigma} = g^\beta_\alpha$. Расписывая это равенство покомпонентно для $\alpha = \beta = 0$,

$$g_{0\sigma}\,g^{0\sigma} = g_{00}\,g^{00} + g_{0i}\,g^{0i} = \delta^0_0 = 1, \tag{2.159}$$

и учитывая, что

$$g_{00}=\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2, \qquad g_{0i}=-\frac{1}{c}\,v_i\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right), \tag{2.160}$$

получаем

$$g^{00}=\frac{1}{\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2}\left(1-\frac{1}{c^2}\,v_i v^i\right), \qquad v_i v^i=h_{ik}\,v^i v^k=v^2. \tag{2.161}$$

Подставляя полученные выражения для компонент фундаментального метрического тензора в $\Box\varphi$ (2.157) и заменяя обычные операторы дифференцирования на хронометрически инвариантные, получаем уравнения Даламбера для скалярного поля в хронометрически инвариантном виде

$$\Box\,\varphi=\frac{1}{c^2}\frac{{}^*\partial^2\varphi}{\partial t^2}-h^{ik}\frac{{}^*\partial^2\varphi}{\partial x^i\partial x^k}={}^*\Box\,\varphi\,, \tag{2.162}$$

где ${}^*\Box$ четырехмерный хронометрически инвариантный оператор Даламбера и ${}^*\Delta$ трехмерный хронометрически инвариантный оператор Лапласа

$${}^*\Box=\frac{1}{c^2}\frac{{}^*\partial^2}{\partial t^2}-h^{ik}\frac{{}^*\partial^2}{\partial x^i\partial x^k}\,, \tag{2.163}$$

$${}^*\Delta=-g^{ik}\,{}^*\nabla_i\,{}^*\nabla_k=h^{ik}\frac{{}^*\partial^2}{\partial x^i\partial x^k}\,. \tag{2.164}$$

Теперь применим оператор Лапласа к четырехмерному векторному полю A^α в псевдоримановом пространстве

$$\Box\,A^\alpha=g^{\mu\nu}\,\nabla_\mu\,\nabla_\nu\,A^\alpha. \tag{2.165}$$

Так как величина $\Box\,A^\alpha$ является четырехмерным вектором, то ее хронометрически инвариантные (физические наблюдаемые) проекции на время и на пространство вычисляются по формулам

$$T=b_\sigma\,\Box\,A^\sigma=b_\sigma\,g^{\mu\nu}\,\nabla_\mu\,\nabla_\nu\,A^\sigma, \tag{2.166}$$

$$B^i=h^i_\sigma\,\Box\,A^\sigma=h^i_\sigma\,g^{\mu\nu}\,\nabla_\mu\,\nabla_\nu\,A^\sigma. \tag{2.167}$$

Вообще вывод хронометрически инвариантных уравнений Даламбера для векторного поля в псевдоримановом пространстве не является тривиальным, т.к. символы Кристоффеля не равны нулю и выкладки для проекций вторых производных занимают десятки

страниц*. Это довольно трудоемкое дело, требующее не одной недели аккуратных вычислений и проверок полученных результатов. Однако значение оператора Даламбера в теории движения частиц трудно недооценить, и достижение цели в данном случае оправдывает все приложенные усилия. Основным критерием правильности выкладок является правило хронометрической инвариантности, сформулированное Зельмановым: *при правильно сделанных выкладках все члены итоговых уравнений получатся хронометрически инвариантными, т.е. состоящими из хронометрически инвариантных производных от наблюдаемых компонент векторного поля и хронометрически инвариантных характеристик пространства отсчета.*

После соответствующих вычислений мы получаем, что хронометрически инвариантные проекции уравнений Даламбера для векторного поля в псевдоримановом пространстве (2.166, 2.167) имеют следующий вид

$$\begin{gathered} T = {}^*\Box\varphi - \frac{1}{c^3}\frac{{}^*\partial}{\partial t}\left(F_k q^k\right) - \frac{1}{c^3}F_i\frac{{}^*\partial q^i}{\partial t} + \frac{1}{c^2}F^i\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^i} + \\ + h^{ik}\Delta^m_{ik}\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^m} - h^{ik}\frac{1}{c}\frac{{}^*\partial}{\partial x^i}\left[\left(D_{kn}+A_{kn}\right)q^n\right] + \frac{D}{c^2}\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial t} - \\ - \frac{1}{c}D^k_m\frac{{}^*\partial q^m}{\partial x^k} + \frac{2}{c^3}A_{ik}F^i q^k + \frac{\varphi}{c^4}F_iF^i - \frac{\varphi}{c^2}D_{mk}D^{mk} - \\ - \frac{D}{c^3}F_m q^m - \frac{1}{c}\Delta^m_{kn}D^k_m q^n + \frac{1}{c}h^{ik}\Delta^m_{ik}\left(D_{mn}+A_{mn}\right)q^n, \end{gathered} \qquad (2.168)$$

$$\begin{gathered} B^i = {}^*\Box A^i + \frac{1}{c^2}\frac{{}^*\partial}{\partial t}\left[\left(D^i_k + A_{k\cdot}^{\cdot i}\right)q^k\right] + \frac{D}{c^2}\frac{{}^*\partial q^i}{\partial t} + \\ + \frac{1}{c^2}\left(D^i_k + A_{k\cdot}^{\cdot i}\right)\frac{{}^*\partial q^k}{\partial t} - \frac{1}{c^3}\frac{{}^*\partial}{\partial t}\left(\varphi F^i\right) - \frac{1}{c^3}F^i\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial t} + \\ + \frac{1}{c^2}F^k\frac{{}^*\partial q^i}{\partial x^k} - \frac{1}{c}\left(D^{mi} + A^{mi}\right)\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^m} + \frac{1}{c^4}q^kF_kF^i + \\ + \frac{1}{c^2}\Delta^i_{km}q^mF^k - \frac{\varphi}{c^3}DF^i + \frac{D}{c^2}\left(D^i_n + A_{n\cdot}^{\cdot i}\right)q^n - \end{gathered}$$

*Отчасти поэтому практические приложения теории электромагнитного поля и движущегося заряда в основном вычисляют в галилеевой системе отсчета пространства Минковского (пространства-времени Специальной Теории Относительности), в которой символы Кристоффеля равны нулю. Впрочем, при общековариантной записи вообще трудно однозначно интерпретировать результаты вычислений, если они не выражены через физические наблюдаемые величины (хронометрические инварианты) или не приведены к какому-либо простому частному случаю, например в пространстве Минковского.

$$
\begin{gathered}
-h^{km}\left\{\frac{{}^*\partial}{\partial x^k}\left(\Delta^i_{mn}q^n\right)+\frac{1}{c}\frac{{}^*\partial}{\partial x^k}\left[\varphi\left(D^i_m+A^{\cdot i}_{m\cdot}\right)\right]+\right.\\
+\left(\Delta^i_{kn}\Delta^n_{mp}-\Delta^n_{km}\Delta^i_{np}\right)q^p+\frac{\varphi}{c}\left[\Delta^i_{kn}\left(D^n_m+A^{\cdot n}_{m\cdot}\right)-\right.\\
\left.\left.-\Delta^n_{km}\left(D^i_n+A^{\cdot i}_{n\cdot}\right)\right]+\Delta^i_{kn}\frac{{}^*\partial q^n}{\partial x^m}-\Delta^n_{km}\frac{{}^*\partial q^i}{\partial x^n}\right\},
\end{gathered}
\tag{2.169}
$$

где ${}^*\Box\varphi$ и ${}^*\Box q^i$ результаты применения хронометрически инвариантного оператора Даламбера (2.163) к величинам $\varphi=\frac{A_0}{\sqrt{g_{00}}}$ и $q^i=A^i$ (физически наблюдаемым компонентам вектора A^α)

$$
{}^*\Box\varphi=\frac{1}{c^2}\frac{{}^*\partial^2\varphi}{\partial t^2}-h^{ik}\frac{{}^*\partial^2\varphi}{\partial x^i\partial x^k}\,,
\tag{2.170}
$$

$$
{}^*\Box q^i=\frac{1}{c^2}\frac{{}^*\partial^2 q^i}{\partial t^2}-h^{km}\frac{{}^*\partial^2 q^i}{\partial x^k\partial x^m}\,.
\tag{2.171}
$$

Результат применения оператора Даламбера к тензорному полю есть *уравнения Даламбера.* С физико-математической точки зрения — это уравнения распространения волн этого поля. Если уравнения Даламбера не равны нулю, то это уравнения распространения волн поля, порожденных каким-то внесенным “источником” или их распределением в пространстве (уравнения Даламбера с “источником”). Например, для электромагнитного поля источниками служат электрические заряды и токи. Если же результат воздействия оператора Даламбера на поле равен нулю, то это будут уравнения распространения волн данного поля, существующего вне связи с каким-либо “источниками”, внесенными в пространство. Таким образом, равенство нулю всех членов, не стоящих под знаком хронометрически инвариантного оператора Даламбера ${}^*\Box$, дает физические условия распространения наблюдаемых волн исследуемого поля в четырехмерном пространстве-времени, когда гравитационно-инерциальная сила F_i равна нулю, отсутствуют вращение A_{ik} и деформация D_{ik} самого пространства и нет какой-либо дополнительной среды. В этом случае хронометрически инвариантные (наблюдаемые) уравнения распространения волн поля A^α получаются в результате приравнивания к нулю выражений (2.170, 2.171) и имеют довольно простой вид. Если гравитационный потенциал пространства отличен от нуля, а само пространство вращается и деформируется (достаточно проявления хотя бы одного из этих геометрических свойств пространства), то, как видно из формул (2.168, 2.169), уравнения распространения волн существенно усложняются из-за учета воз-

действия каждого из этих геометрических факторов. Если же рассматриваемая область пространства-времени, помимо исследуемого тензорного поля, заполнена еще какой-либо средой, то в уравнениях Даламбера появится дополнительный член в правой части, характеризующий эту среду и определяемый из описывающих ее уравнений.

§2.7 Заключение

Итак, подведем итоги этой главы. Помимо общих сведений о тензорах и тензорной алгебре мы сделали ряд удобных заготовок, которые существенно облегчат наши расчеты в следующих главах. Например, встретившись по ходу исследований с каким-либо антисимметричным тензором, теперь не нужно специально вычислять его физически наблюдаемые компоненты, достаточно лишь воспользоваться полученными здесь общими формулами. То же самое и для дифференциальных операторов. Равенство нулю абсолютной производной динамического вектора частицы по направлению дает динамические уравнения движения этой частицы. Равенство нулю дивергенции векторного поля дает условие Лоренца и уравнение неразрывности. Равенство нулю дивергенции симметричного тензора 2-го ранга дает законы сохранения, а равенство нулю дивергенции антисимметричного тензора (и псевдотензора) 2-го ранга — уравнения Максвелла. Ротор векторного поля — это тензор электромагнитного поля (тензор Максвелла). Уравнения Даламбера суть уравнения распространения волн в обобщенном виде, т.е. не только в приближении геометрической оптики. И это далеко не полный список приложений наших математических заготовок. Вычисление их физических наблюдаемых проекций — порой довольно сложное дело, совершенно незачем несколько раз повторять эти выкладки в книге для каждого конкретного случая. Гораздо удобнее взять уже готовые выражения из этой главы и просто подставить в них необходимые компоненты дифференцируемой величины.

Глава 3 Заряженная частица в электромагнитном поле в псевдоримановом пространстве

§ 3.1 Постановка задачи

В этой главе нам предстоит решить две задачи. Во-первых, необходимо построить теорию электромагнитного поля в четырехмерном псевдоримановом пространстве, в которой все характеристики поля будут выражены в хронометрически инвариантном виде (т.е. через физические наблюдаемые величины). И, во-вторых, нам необходимо вывести хронометрически инвариантные динамические уравнения движения для частицы с электрическим зарядом.

Электромагнитное поле обычно рассматривается как векторное поле четырехмерного потенциала A^{α} в четырехмерном пространстве — времени (псевдоримановом пространстве). Его временной компонентой является *скалярный потенциал* электромагнитного поля φ, а трехмерные компоненты образуют так называемый *вектор-потенциал* A^i. Собственно, четырехмерный потенциал электромагнитного поля A^{α} в системе единиц СГСЭ и гауссовой имеет размерность

$$A^{\alpha}\ [\,\text{грамм}^{1/2}\,\text{см}^{1/2}\,\text{сек}^{-1}\,], \tag{3.1}$$

такой же размерностью обладают и его компоненты φ и A^i.

Таким образом, исследование электромагнитного поля существенно отличается от исследования поля гравитации: в рамках теории хронометрических инвариантов было получено, что гравитационно-инерциальная сила F^i и гравитационный потенциал w (1.38) являются функциями только геометрических характеристик пространства, тогда как электромагнитное поле (т.е. поле потенциала A^{α}) на сегодняшний день не "геометризовано", и мы вынуждены рассматривать его просто как внешнее векторное поле, внесенное в пространство-время.

Уравнения классической электродинамики — уравнения Максвелла, устанавливающие соотношения между напряженностями электрического и магнитного полей, — были выведены еще в то

время, когда в методах теоретической физики не использовалось не только искривленное псевдориманово пространство, но и плоское пространство Минковского. Затем, с появлением теории относительности, была создана релятивистская электродинамика, в рамках которой уравнения Максвелла были получены в четырехмерной общековариантной формулировке в псевдоримановом пространстве. Однако, приобретя общековариантный вид, они потеряли ту наглядность, которая была преимуществом классической электродинамики. Правда, четырехмерные уравнения в пространстве Минковского можно просто представить в виде скалярной (временной) и векторных (пространственных) компонент, т.к. в галилеевой системе отсчета они по определению являются наблюдаемыми величинами. Но когда мы переходим к искривленному, неоднородному и анизотропному псевдориманову пространству, задача сопоставления скалярной и векторных компонент общековариантных уравнений с уравнениями классической и релятивистской электродинамики становится нетривиальной, т.к. возникает проблема, какие величины считать физическими наблюдаемыми.

Вообще говоря, очевидно, что уравнения релятивистской электродинамики в псевдоримановом пространстве в итоге должны быть записаны относительно физических наблюдаемых компонент электромагнитного поля и физических наблюдаемых (эталонных) характеристик пространства отсчета наблюдателя. Эту задачу мы будем решать с помощью математического аппарата хронометрических инвариантов, т.е. посредством проецирования общековариантных величин на время и на пространство реального тела отсчета, физические и геометрические характеристики которого являются эталонами для измерений. Полученные таким путем результаты позволят нам вывести *наблюдаемое обобщение* основных величин и законов классической и релятивистской электродинамики в такой форме, которая учитывает влияние физических и геометрических характеристик пространства отсчета (тела отсчета) на результаты наблюдений.

§ 3.2 Наблюдаемые компоненты тензора электромагнитного поля. Инварианты поля

Тензор электромагнитного поля (по определению) представляет собой ротор четырехмерного электромагнитного поля A^α и иначе называется *тензором Максвелла*

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\,. \tag{3.2}$$

Как нетрудно видеть, это выражение представляет собой общековариантное обобщение трехмерных величин классической электродинамики

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\,, \qquad \vec{H} = \text{curl}\,\vec{A}\,, \tag{3.3}$$

где $\vec{E}$ и $\vec{H}$ напряженности электрического и магнитного полей, φ скалярный и $\vec{A}$ трехмерный векторный потенциалы электромагнитного поля и

$$\overrightarrow{\nabla} = \vec{\imath}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z} \tag{3.4}$$

оператор градиента скалярной функции в трехмерном евклидовом пространстве.

В этом параграфе мы выясним, какие компоненты общековариантного тензора электромагнитного поля $F_{\alpha\beta}$ являются физическими наблюдаемыми величинами, и установим связь этих величин с трехмерными векторами напряженности электрического поля $\vec{E}$ и магнитного поля $\vec{H}$ классической электродинамики, которые мы также вычислим в псевдоримановом пространстве (оно, вообще говоря, является искривленным, неоднородным и анизотропным). Здесь очень важно отметить следующее. Так как плоском пространстве-времени (пространстве Минковского) в инерциальной системе отсчета метрика имеет вид

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{3.5}$$

и компоненты фундаментального метрического тензора принимают значения

$$g_{00} = 1\,, \qquad g_{0i} = 0\,, \qquad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1\,, \tag{3.6}$$

то нет различия между значениями ковариантных и контравариантных компонент вектора A^α (в частности, потому, что все вычисления в пространстве Минковского существенно упрощаются)

$$\varphi = A_0 = A^0, \qquad A_i = -A^i. \tag{3.7}$$

В псевдоримановом пространстве (и в римановом пространстве вообще) это не все равно, т.к. метрика имеет общий вид, поэтому скалярный потенциал и вектор-потенциал электромагнитного поля следует определять как физические наблюдаемые (хронометрически инвариантные) компоненты четырехмерного потенциала A^α

$$\varphi = b^\alpha A_\alpha = \frac{A_0}{\sqrt{g_{00}}}\,, \qquad q^i = h^i_\sigma A^\sigma = A^i. \tag{3.8}$$

Остальные, не являющиеся хронометрически инвариантными, компоненты A^α выражаются через φ и q^i в виде

$$A^0 = \frac{1}{1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}}\left(\varphi + \frac{1}{c}\,v_i q^i\right), \qquad A_i = -q_i - \frac{\varphi}{c}\,v_i\,. \tag{3.9}$$

Причем, согласно теории хронометрических инвариантов, ковариантный хронометрически инвариантный вектор q_i получается из контравариантного q^i в результате опускания индекса с помощью хронометрически инвариантного (наблюдаемого) трехмерного тензора h_{ik}, т.е. $q_i = h_{ik}q^k$, тогда как обычный ковариантный вектор A_i, не являющийся хронометрическим инвариантом, получается путем опускания индекса с помощью четырехмерного фундаментального метрического тензора $A_i = g_{i\alpha}A^\alpha$.

Квадрат длины вектора четырехмерного электромагнитного потенциала A^α в сопутствующей системе отсчета, по формуле (2.39), имеет вид

$$A_\alpha A^\alpha = g_{\alpha\beta}A^\alpha A^\beta = \varphi^2 - h_{ik}q^i q^k = \varphi^2 - q^2, \tag{3.10}$$

и является: вещественным, если $\varphi^2 > q^2$; мнимым, если $\varphi^2 < q^2$; нулевым (изотропным), если $\varphi^2 = q^2$.

Теперь, используя в определении тензора электромагнитного поля $F_{\alpha\beta}$ (3.2) компоненты четырехмерного потенциала A^α (3.8, 3.9), выражая обычные производные через хронометрически инвариантные производные (1.33), по формулам для компонент ротора произвольного векторного поля (2.143–2.150) получаем физические наблюдаемые (хронометрически инвариантные) компоненты данного тензора $F_{\alpha\beta}$

$$\frac{F_{0\cdot}^{\cdot i}}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{g^{i\alpha}F_{0\alpha}}{\sqrt{g_{00}}} = h^{ik}\left(\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^k} + \frac{1}{c}\frac{{}^*\partial q_k}{\partial t}\right) - \frac{\varphi}{c^2}\,F^i, \tag{3.11}$$

$$F^{ik} = g^{i\alpha}g^{k\beta}F_{\alpha\beta} = h^{im}h^{kn}\left(\frac{{}^*\partial q_m}{\partial x^n} - \frac{{}^*\partial q_n}{\partial x^m}\right) - \frac{2\varphi}{c}\,A^{ik}. \tag{3.12}$$

Обозначим наблюдаемые компоненты тензора электромагнитного поля

$$E^i = \frac{F_{0\cdot}^{\cdot i}}{\sqrt{g_{00}}}\,, \qquad H^{ik} = F^{ik}. \tag{3.13}$$

Образованные с их помощью ковариантные хронометрически инвариантные величины равны

$$E_i = h_{ik}E^k = \frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^i} + \frac{1}{c}\frac{{}^*\partial q_i}{\partial t} - \frac{\varphi}{c^2}\,F_i\,, \tag{3.14}$$

$$H_{ik} = h_{im} h_{kn} H^{mn} = \frac{{}^*\partial q_i}{\partial x^k} - \frac{{}^*\partial q_k}{\partial x^i} - \frac{2\varphi}{c} A_{ik} \,, \tag{3.15}$$

а смешанные компоненты $H_{k\cdot}^{\cdot m} = -H_{\cdot k}^{m\cdot}$ получаются из компоненты H^{ik} с помощью трехмерного хронометрически инвариантного метрического тензора h_{ik}, т.е. $H_{k\cdot}^{\cdot m} = h_{ki} H^{im}$. При этом деформация пространства отсчета $D_{ik} = \frac{1}{2} \frac{{}^*\partial h_{ik}}{\partial t}$ (1.40) содержится тоже в этих выражениях, но в неявном виде, и проявляется при подстановке компонент $q_k = h_{km} q^m$ в выражения для производных по времени. Кроме того, мы всегда можем выразить и остальные компоненты тензора электромагнитного поля $F_{\alpha\beta}$ через его наблюдаемые компоненты E^i и H^{ik} (3.11), используя формулы для компонент произвольного антисимметричного тензора (2.112–2.115). Это возможно, т.к. в обобщенные выражения (2.112–2.115) входят величины E^i и H^{ik} в "неявном" виде, независимо от того, будь это компоненты ротора или антисимметричного тензора какого-то другого вида.

В пространстве Минковского, когда ускорение F^i, вращение A_{ik} и деформация D_{ik} пространства отсчета равны нулю, выражение для компоненты E_i (3.14) принимает вид

$$E_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i} + \frac{1}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t} \,, \tag{3.16}$$

или в трехмерной векторной форме,

$$\vec{E} = \overrightarrow{\nabla}\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \,, \tag{3.17}$$

что с точностью до знака совпадает с выражением для $\vec{E}$ (3.3) из классической электродинамики.

Теперь для того, чтобы выразить напряженность магнитного поля в трехмерном векторном виде, используем компоненты псевдотензора $F^{*\alpha\beta}$, который в псевдоримановом пространстве является дуальным тензору электромагнитного поля $F^{*\alpha\beta} = \frac{1}{2} E^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\mu\nu}$ (2.123). Физическими наблюдаемыми компонентами этого псевдотензора, согласно формуле (2.124), являются следующие величины

$$H^{*i} = \frac{F_{0\cdot}^{*\cdot i}}{\sqrt{g_{00}}} \,, \qquad E^{*ik} = F^{*ik}. \tag{3.18}$$

Используя выражения для компонент псевдотензора $F^{*\alpha\beta}$, полученные во 2-й главе (2.125–2.131), и формулы для E_i и H_{ik} (3.14, 3.15), получаем развернутые выражения для H^{*i} и E^{*ik}, а именно

$$H^{*i} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{imn}\left(\frac{{}^*\partial q_m}{\partial x^n} - \frac{{}^*\partial q_n}{\partial x^m} - \frac{2\varphi}{c} A_{mn}\right) = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{imn} H_{mn} \,, \tag{3.19}$$

$$E^{*ik} = \varepsilon^{ikn}\left(\frac{\varphi}{c^2}\,F_n - \frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^n} - \frac{1}{c}\frac{{}^*\partial q_n}{\partial t}\right) = -\,\varepsilon^{ikn}E_k\,. \tag{3.20}$$

Отсюда видно, что дуально сопряженными являются пары тензоров: H^{*i} и H_{mn}, E^{*ik} и E_m. Хронометрически инвариантная величина H^{*i} (3.19) состоит из члена

$$\frac{1}{2}\,\varepsilon^{imn}\left(\frac{{}^*\partial q_m}{\partial x^n} - \frac{{}^*\partial q_n}{\partial x^m}\right) = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{imn}\left({}^*\nabla_n\, q_m - {}^*\nabla_m\, q_n\right), \tag{3.21}$$

представляющего собой хронометрически инвариантный ротор трехмерного векторного поля q_m и члена

$$\frac{1}{2}\,\varepsilon^{imn}\,\frac{2\varphi}{c}\,A_{mn} = \frac{2\varphi}{c}\,\Omega^{*i}, \tag{3.22}$$

где $\Omega^{*i} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{imn}A_{mn}$ хронометрически инвариантный псевдовектор угловой скорости вращения пространства отсчета. В галилеевой системе отсчета пространства Минковского, т.е. при отсутствии ускорения, вращения и деформации, полученное нами выражение для хронометрически инвариантного псевдовектора напряженности магнитного поля H^{*i} (3.19) принимает вид

$$H^{*i} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{imn}\left(\frac{\partial q_m}{\partial x^n} - \frac{\partial q_n}{\partial x^m}\right), \tag{3.23}$$

или в трехмерной векторной форме

$$\vec{H} = \mathrm{curl}\,\vec{A}. \tag{3.24}$$

Таким образом, структура псевдориманова пространства оказывает воздействие на электромагнитное поле тем, что наблюдаемые (хронометрически инвариантные) векторы электрической E_i (3.14) и магнитной H^{*i} (3.19) напряженностей зависят от гравитационного потенциала и вращения самого пространства отсчета.

Такая же ситуация будет иметь место и плоском пространстве Минковского, если избрать в качестве системы отсчета наблюдателя неинерциальную систему отсчета, которая движется ускоренно и вращается. Однако в пространстве Минковского всегда можно избрать галилееву систему отсчета (что невозможно в псевдоримановом пространстве), т.к. само пространство Минковского систему отсчета никак не ускоряет, не вращает, не деформирует. Поэтому такие эффекты в пространстве Минковского являются чисто относительными (координатными). В релятивистской электродинамике вводятся *инварианты электромагнитного поля* (или просто —

инварианты поля)

$$J_1 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2F_{0i}F^{0i} + F_{ik}F^{ik}, \tag{3.25}$$

$$J_2 = F_{\mu\nu}F^{*\mu\nu} = 2F_{0i}F^{*0i} + F_{ik}F^{*ik}. \tag{3.26}$$

Первый из них является скаляром, второй — псевдоскаляром. Выражая их через компоненты тензора Максвелла

$$J_1 = H_{ik}H^{ik} - 2E_iE^i, \qquad J_2 = \varepsilon^{imn}\left(E_mH_{in} - E_iH_{nm}\right), \tag{3.27}$$

и используя выражения для компонент дуального псевдотензора $F^{*\mu\nu}$, которые мы получили во 2-й главе, можно записать инварианты поля в виде

$$J_1 = -2\left(E_iE^i - H_{*i}H^{*i}\right), \qquad J_2 = -4E_iH^{*i}. \tag{3.28}$$

В силу того, что J_1 и J_2 являются инвариантами, можно утверждать следующее. Напряженности электрического и магнитного полей равны в случаях:

1) если в какой-либо системе отсчета $E^2 = H^{*2}$, это равенство будет сохраняться и в любой другой системе отсчета;
2) если в какой-либо системе отсчета векторы напряженностей электрического и магнитного полей ортогональны $E_iH^{*i} = 0$, эта ортогональность также сохраняется в любой другой системе отсчета.

Электромагнитное поле, удовлетворяющее условиям $E^2 = H^{*2}$ и $E_iH^{*i} = 0$, т.е. когда оба инварианта поля (3.28) равны нулю, в электродинамике называют *изотропным.* Причем здесь под изотропностью подразумевается не местоположение поля в светоподобной области пространства-времени (как принято обозначать в в теории пространства-времени), а свойство поля излучаться одинаково во всех направлениях трехмерного пространства. Инварианты электромагнитного поля можно также выразить через хронометрически инвариантные производные от наблюдаемых скалярного потенциала φ и вектор-потенциала q^i (3.8), а также через хронометрически инвариантные характеристики пространства отсчета

$$\begin{aligned} J_1 = 2\Bigg[& h^{im}h^{kn}\left(\frac{^*\partial q_i}{\partial x^k} - \frac{^*\partial q_k}{\partial x^i}\right)\frac{^*\partial q_m}{\partial x^n} - h^{ik}\frac{^*\partial\varphi}{\partial x^i}\frac{^*\partial\varphi}{\partial x^k} - \\ & - \frac{2}{c}\,h^{ik}\frac{^*\partial\varphi}{\partial x^i}\frac{^*\partial q_k}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\,h^{ik}\frac{^*\partial q_i}{\partial t}\frac{^*\partial q_k}{\partial t} + \frac{8\varphi}{c^2}\,\Omega_i\Omega^i - \\ & - \frac{2\varphi}{c}\,\varepsilon^{imn}\Omega_m\frac{^*\partial q_i}{\partial x^n} + \frac{2\varphi}{c^2}\frac{^*\partial\varphi}{\partial x^i}F^i + \frac{2\varphi}{c^3}\frac{^*\partial q_i}{\partial t}F^i - \frac{\varphi}{c^4}\,F_iF^i\Bigg], \end{aligned} \tag{3.29}$$

$$J_2 = \frac{1}{2}\left[\varepsilon^{imn}\left(\frac{{}^*\partial q_m}{\partial x^n} - \frac{{}^*\partial q_n}{\partial x^m}\right) - \frac{4\varphi}{c}\,\Omega^{*i}\right]\left(\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^i} + \frac{1}{c}\frac{{}^*\partial q_i}{\partial t} - \frac{\varphi}{c^2}\,F_i\right). \quad (3.30)$$

Физические условия для изотропного электромагнитного поля получаются путем приравнивания предыдущих выражений (3.29, 3.30) к нулю. В этом случае мы видим, что совместное выполнение условия равенства трехмерных длин векторов напряженностей электрического и магнитного полей $E^2 = H^{*2}$ и условие их взаимной ортогональности $E_i H^{*i} = 0$ в псевдоримановом пространстве определяются не только свойствами самого поля (скалярным потенциалом φ и вектором-потенциалом q^i), но также и ускорением F^i, вращением A_{ik} и деформацией D_{ik} самого пространства тела отсчета. В частности, векторы E_i и H^{*i} взаимно ортогональны, когда пространство голономно $\Omega^{*i} = 0$, а трехмерное поле вектор-потенциала q^i является безвихревым $\varepsilon^{imn}\left(\frac{{}^*\partial q_m}{\partial x^m} - \frac{{}^*\partial q_n}{\partial x^n}\right) = 0$.

§3.3 Хронометрически инвариантные уравнения Максвелла. Закон сохранения электрического заряда. Условие Лоренца

В классической электродинамике зависимости между напряженностями электрического поля $\vec{E}$ [грамм$^{1/2}$см$^{-1/2}$сек$^{-1}$] и магнитного поля $\vec{H}$ [грамм$^{1/2}$см$^{-1/2}$сек$^{-1}$] устанавливаются *уравнениями Максвелла*, которые представляют собой результат обобщения опытных фактов. В середине XIX-го века Дж. К. Максвелл показал: когда электромагнитное поле возбуждается в вакууме заданными зарядами и токами, собственно поле определяется системой из двух групп уравнений [20]

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{curl}\,\vec{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \\ &\mathrm{div}\,\vec{E} = 4\pi\rho \end{aligned}\right\}\ \mathrm{I}, \quad (3.31a)$$

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{curl}\,\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = 0 \\ &\mathrm{div}\,\vec{H} = 0 \end{aligned}\right\}\ \mathrm{II}, \quad (3.31b)$$

где ρ [грамм$^{1/2}$см$^{-3/2}$сек$^{-1}$] плотность распределения электрического заряда (количество заряда e [грамм$^{1/2}$см$^{3/2}$сек$^{-1}$], содержащегося в 1 см^3) и $\vec{j}$ [грамм$^{1/2}$см$^{-1/2}$сек$^{-2}$] вектор плотности тока. Уравнения, содержащие источники ρ и $\vec{j}$, порождающие электромагнитное поле, называют *первой группой* уравнений Максвелла,

а уравнения, не содержащие источников тока поля — ***второй группой*** уравнений Максвелла.

Первое уравнение 1-й группы представляет собой закон Био-Савара, второе — теорему Гаусса, записанные в дифференциальной форме. Первое и второе уравнения 2-й группы, соответственно, являются дифференциальной формой закона электромагнитной индукции Фарадея и условием отсутствия магнитных зарядов. Всего получается 8 уравнений (2 векторных и 2 скалярных), тогда как неизвестных 10: 3 компоненты $\vec{E}$, 3 компоненты $\vec{H}$, 3 компоненты $\vec{j}$, и одна компонента ρ.

Связь источников поля ρ и $\vec{j}$ устанавливается уравнением *закона сохранения электрического заряда*, который в дифференциальной форме имеет вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0\,, \tag{3.32}$$

и является математическим выражением экспериментального факта, что электрический заряд не может быть уничтожен, а при контакте заряженных тел лишь перераспределяется между ними.

Теперь у нас есть система из 9 уравнений относительно 10 неизвестных, т.е. пока система уравнений, определяющих поле и его источники, остается не полностью определенной. Десятым уравнением, благодаря которому система уравнений поля и его источников становится определенной (число уравнений равно числу неизвестных), является условие Лоренца, накладываемое на потенциалы электромагнитного поля и имеющее вид

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{A} = 0\,. \tag{3.33}$$

Условие Лоренца следует из того, что скалярный потенциал φ и вектор-потенциал $\vec{A}$ электромагнитного поля, связанные с напряженностями $\vec{E}$ и $\vec{H}$ соотношениями (3.3), определяются из них неоднозначно: $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в (3.3) не изменяются при замене

$$\vec{A} = \vec{A}' + \vec{\nabla}\Psi\,, \qquad \varphi = \varphi' - \frac{1}{c}\frac{\partial\Psi}{\partial t}\,, \tag{3.34}$$

где Ψ произвольный скаляр. Очевидно, что неоднозначность определения φ и $\vec{A}$ допускает, помимо условия Лоренца, и другие соотношения этих величин. Тем не менее, именно условие Лоренца позволяет преобразовать уравнения Максвелла в волновые уравнения. Получается это следующим образом. Уравнение $\operatorname{div}\vec{H}=0$ (3.31) выполняется полностью, если положить $\vec{H}=\operatorname{curl}\vec{A}$. При этом первое

уравнение 2-й группы принимает вид

$$\mathrm{curl}\left(\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=0\,, \tag{3.35}$$

решением которого является

$$\vec{E}=-\overrightarrow{\nabla}\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\,. \tag{3.36}$$

Подставляя величины $\vec{H}=\mathrm{curl}\vec{A}$ и $\vec{E}$ (3.36) в 1-ю группу уравнений Максвелла, получаем

$$\Delta\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\overrightarrow{\nabla}\left(\mathrm{div}\vec{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=-\frac{4\pi}{c}\,\vec{j}\,, \tag{3.37}$$

$$\Delta\varphi+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{div}\vec{A}\right)=-4\pi\rho\,, \tag{3.38}$$

где $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ обычный оператор Лапласа.

Накладывая на потенциалы φ и $\vec{A}$ условие Лоренца (3.33), приводим уравнения 1-й группы к виду

$$\Box\varphi=-4\pi\rho\,, \tag{3.39}$$

$$\Box\vec{A}=-\frac{4\pi}{c}\,\vec{j}\,, \tag{3.40}$$

где $\Box=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta$ обычный оператор Даламбера.

Результат воздействия оператора Даламбера на поле представляет собой уравнения распространения волн этого поля (см. §2.6). Поэтому полученный результат означает, что при выполнении условия Лоренца группа уравнений Максвелла (3.31) представляет собой систему уравнений распространения волн скалярного и векторного потенциалов электромагнитного поля с источниками (зарядами и токами). Эти уравнения в псевдоримановом пространстве мы выведем в следующем параграфе, а пока рассмотрим общековариантные уравнения Максвелла в псевдоримановом пространстве и выведем их в хронометрически инвариантном виде, т.е. выраженными через физические наблюдаемые величины. В псевдоримановом пространстве условие Лоренца имеет общековариантный вид

$$\nabla_\sigma A^\sigma=\frac{\partial A^\sigma}{\partial x^\sigma}+\Gamma^\sigma_{\sigma\mu}A^\mu=0\,, \tag{3.41}$$

т.е. представляет собой условие сохранения четырехмерного потенциала поля. Аналогичный вид имеет и закон сохранения электрического заряда (*уравнение неразрывности*)

$$\nabla_\sigma j^\sigma = 0\,, \tag{3.42}$$

где j^α четырехмерный *вектор тока* (иначе — *ток смещения*), наблюдаемыми компонентами которого являются плотность электрического заряда

$$\rho = \frac{1}{c}\,\frac{j_0}{\sqrt{g_{00}}}\,, \tag{3.43}$$

и трехмерный вектор плотности тока j^i. Используя выражение для дивергенции векторного поля в хронометрически инвариантном виде, выведенное нами во 2-й главе (2.107), мы получаем условие Лоренца (3.41), также записанное в хронометрически инвариантном виде

$$\frac{1}{c}\,\frac{^*\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\varphi}{c}\,D + {}^*\nabla_i\, q^i - \frac{1}{c^2}\,F_i\, q^i = 0\,, \tag{3.44}$$

и уравнение неразрывности (3.42) также в хронометрически инвариантном виде

$$\frac{^*\partial\rho}{\partial t} + \rho D + {}^*\nabla_i\, j^i - \frac{1}{c^2}\,F_i\, j^i = 0\,. \tag{3.45}$$

Здесь величина $D = h^{ik}D_{ik} = D^n_n = \frac{^*\partial \ln\sqrt{h}}{\partial t}$ обозначает след тензора скоростей деформации (1.40) — скорость относительного расширения элемента объема пространства, а ${}^*\nabla_i$ — оператор хронометрически инвариантной дивергенции (2.105).

Так как F_i (1.38) содержит производную от гравитационного потенциала $\mathrm{w} = c^2(1-\sqrt{g_{00}})$, то член $\frac{1}{c^2}\,F_i q^i$ в полученных выражениях (3.44, 3.45) учитывает различие скорости хода времени на противоположных стенках элементарного объема. В выражение для гравитационно-инерциальной силы F_i (1.38) входит также нестационарность скорости вращения пространства. Кроме того, гравитационный потенциал и скорость вращения пространства входят и в хронометрически инвариантные операторы дифференцирования (1.33)

$$\frac{^*\partial}{\partial t} = \frac{1}{1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}}\,\frac{\partial}{\partial t}\,, \qquad \frac{^*\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{1}{c^2}\,v_i\,\frac{^*\partial}{\partial t}\,, \tag{3.46}$$

Таким образом условия сохранения потоков векторных полей A^α, (3.44, 3.45), непосредственно зависят от величины гравитационного потенциала и от скорости вращения пространства. Хронометрически инвариантные величины $\frac{^*\partial\varphi}{\partial t}$ и $\frac{^*\partial\rho}{\partial t}$ представляют собой

наблюдаемые измерения во времени физических наблюдаемых величин φ и ρ. Хронометрически инвариантные величины φD и ρD являются наблюдаемыми изменениями во времени трехмерных объемов, заполненных величинами φ и ρ.

При отсутствии гравитационно-инерциальной силы, вращения и деформации пространства, полученные хронометрически инвариантные выражения для условия Лоренца (3.44) и закона сохранения электрического заряда (3.45) принимают следующий вид

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial q^i}{\partial x^i}-\frac{\partial\ln\sqrt{h}}{\partial x^i}\,q^i=0\,, \tag{3.47}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial j^i}{\partial x^i}-\frac{\partial\ln\sqrt{h}}{\partial x^i}\,j^i=0\,. \tag{3.48}$$

В галилеевой системе отсчета пространства Минковского наши уравнения принимают совсем простой вид

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial q^i}{\partial x^i}=0\,,\qquad \frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial j^i}{\partial x^i}=0\,, \tag{3.49}$$

или в обычной векторной записи

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\mathrm{div}\vec{A}=0\,,\qquad \frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\,\vec{j}=0\,, \tag{3.50}$$

что полностью совпадает с формулировками условия Лоренца (3.33) и закона сохранения электрического заряда (3.32) в классической электродинамике. Теперь рассмотрим уравнения Максвелла. В псевдоримановом пространстве каждая пара уравнений объединяется в одно общековариантное уравнение, и они принимают вид

$$\nabla_\sigma F^{\mu\sigma}=\frac{4\pi}{c}j^\mu,\qquad \nabla_\sigma F^{*\mu\sigma}=0\,, \tag{3.51}$$

где $F^{\mu\sigma}$ контравариантная форма тензора электромагнитного поля (тензора Максвелла) $F^{*\mu\sigma}$ и дуальный ему псевдотензор Максвелла. Используя хронометрически инвариантные выражения для дивергенции антисимметричного тензора 2-го ранга (2.121, 2.122) и для дуального ему псевдотензора (2.135, 2.136), полученные нами во 2-й главе, запишем уравнения Максвелла в хронометрически инвариантном виде

$$\left.\begin{aligned} &{}^*\nabla_i\,E^i-\frac{1}{c}\,H^{ik}A_{ik}=4\pi\rho\\ &{}^*\nabla_k\,H^{ik}-\frac{1}{c^2}\,F_kH^{ik}-\frac{1}{c}\left(\frac{{}^*\partial E^i}{\partial t}+DE^i\right)=\frac{4\pi}{c}\,j^i \end{aligned}\right\}\ \mathrm{I}\,, \tag{3.52}$$

$$\left.\begin{aligned} &{}^*\nabla_i\, H^{*i} - \frac{1}{c}\, E^{*ik} A_{ik} = 0 \\ &{}^*\nabla_k\, E^{*ik} - \frac{1}{c^2}\, F_k E^{*ik} - \frac{1}{c}\left(\frac{{}^*\partial H^{*i}}{\partial t} + D H^{*i}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \text{II}. \qquad (3.53)$$

Хронометрически инвариантные уравнения в таком виде впервые были получены независимо друг от друга Х. дель Прадо и Н. В. Павловым [25]. Однако сложности, возникшие при попытке воспроизвести их вычисления, привели нас к необходимости вывести эти уравнения самостоятельно.

Теперь преобразуем хронометрически инвариантные уравнения Максвелла таким образом, чтобы в них в качестве неизвестных входили лишь величины E^i и H^{*i}. Выразив эти величины из определений (2.125, 2.124, 2.111)

$$H_{*i} = \frac{1}{2}\, \varepsilon_{imn} H^{mn}, \qquad (3.54)$$

$$E^{*ik} = \varepsilon^{ikm}\left(\frac{\varphi}{c^2}\, F_m - \frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^m} - \frac{1}{c}\frac{{}^*\partial q_m}{\partial t}\right) = -\,\varepsilon^{ikm} E_m\,, \qquad (3.55)$$

и умножив первое равенство на ε^{ipq},получаем

$$\varepsilon^{ipq} H_{*i} = \frac{1}{2}\, \varepsilon^{ipq}\varepsilon_{imn} H^{mn} = \frac{1}{2}\left(\delta^p_m\delta^q_n - \delta^q_m\delta^p_n\right) H^{mn} = H^{pq}. \qquad (3.56)$$

Подставляя этот результат в виде $H^{ik} = \varepsilon^{mik} H_{*m}$ в первое уравнение 1-й группы (3.52), преобразуем его к виду

$${}^*\nabla_i\, E^i - \frac{2}{c}\, \Omega_{*m} H^{*m} = 4\pi\rho\,, \qquad (3.57)$$

где $\Omega^{*i} = \frac{1}{2}\, \varepsilon^{imn} A_{mn}$ хронометрически инвариантный псевдовектор угловой скорости вращения пространства отсчета.

Подставляя второе выражение $E^{*ik} = -\varepsilon^{ikm} E_m$ (3.55) в первое уравнение 2-й группы (3.53), получаем

$${}^*\nabla_i\, H^{*i} + \frac{2}{c}\, \Omega_{*m} E^m = 0\,. \qquad (3.58)$$

Далее, после подстановки $H^{ik} = \varepsilon^{mik} H_{*m}$ во второе уравнение 1-й группы (3.52), находим

$${}^*\nabla_k\left(\varepsilon^{mik} H_{*m}\right) - \frac{1}{c^2} F_k \varepsilon^{mik} H_{*m} - \frac{1}{c}\left(\frac{{}^*\partial E^i}{\partial t} + \frac{{}^*\partial \ln\sqrt{h}}{\partial t} E^i\right) = \frac{4\pi}{c} j^i. \qquad (3.59)$$

Умножив обе его части на $\sqrt{h}$ и учитывая, что ${}^*\nabla_k\,\varepsilon^{mik}=0$ преобразуем это выражение (3.59) к виду

$$\varepsilon^{ikm}\,{}^*\nabla_k\big(H_{*m}\sqrt{h}\big)-\frac{1}{c^2}\,\varepsilon^{ikm}F_kH_{*m}\sqrt{h}-\frac{1}{c}\frac{{}^*\partial}{\partial t}\big(E^i\sqrt{h}\big)=\frac{4\pi}{c}\,j^i\sqrt{h}, \tag{3.60}$$

или иначе

$$\varepsilon^{ikm}\,{}^*\widetilde{\nabla}_k\big(H_{*m}\sqrt{h}\big)-\frac{1}{c}\frac{{}^*\partial}{\partial t}\big(E^i\sqrt{h}\big)=\frac{4\pi}{c}\,j^i\sqrt{h}\,, \tag{3.61}$$

где $j^i\sqrt{h}$ объемная плотность тока и ${}^*\widetilde{\nabla}_k={}^*\nabla_k-\frac{1}{c^2}F_k$ хронометрически инвариантная физическая дивергенция (2.106), учитывающая различие темпа течения времени на противоположных стенках элементарного объема. Полученное уравнение (3.60) представляет собой хронометрически инвариантный закон Био-Савара в псевдоримановом пространстве. Подставляя во второе уравнение 2-й группы (3.53) величину $E^{*ik}=-\varepsilon^{ikm}E_m$ (3.55) и проведя аналогичные преобразования, получаем его в виде

$$\varepsilon^{ikm}\,{}^*\widetilde{\nabla}_k\left(E_m\sqrt{h}\right)+\frac{1}{c}\frac{{}^*\partial}{\partial t}\left(H^{*i}\sqrt{h}\right)=0\,, \tag{3.62}$$

представляющим собой хронометрически инвариантную запись закона электромагнитной индукции Фарадея в псевдоримановом пространстве. Окончательно система из 10 хронометрически инвариантных уравнений относительно 10 неизвестных (две группы уравнений Максвелла, условие Лоренца и уравнение неразрывности), определяющих электромагнитное поле и его источники в псевдоримановом пространстве, принимает вид

$$\left.\begin{aligned}&{}^*\nabla_i\,E^i-\frac{2}{c}\,\Omega_{*m}H^{*m}=4\pi\rho\\&\varepsilon^{ikm}\,{}^*\widetilde{\nabla}_k\left(H_{*m}\sqrt{h}\right)-\frac{1}{c}\frac{{}^*\partial}{\partial t}\left(E^i\sqrt{h}\right)=\frac{4\pi}{c}\,j^i\sqrt{h}\end{aligned}\right\}\ \mathrm{I}\,, \tag{3.63}$$

$$\left.\begin{aligned}&{}^*\nabla_i\,H^{*i}+\frac{2}{c}\,\Omega_{*m}E^m=0\\&\varepsilon^{ikm}\,{}^*\widetilde{\nabla}_k\left(E_m\sqrt{h}\right)+\frac{1}{c}\frac{{}^*\partial}{\partial t}\left(H^{*i}\sqrt{h}\right)=0\end{aligned}\right\}\ \mathrm{II}\,, \tag{3.64}$$

$$\frac{1}{c}\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\varphi}{c}\,D+{}^*\widetilde{\nabla}_i\,q^i=0 \qquad \text{условие Лоренца}, \tag{3.65}$$

$$\frac{{}^*\partial\rho}{\partial t}+\rho D+{}^*\widetilde{\nabla}_i\,j^i=0 \quad \text{уравнение неразрывности}. \tag{3.66}$$

В галилеевой системе отсчета пространства Минковского $\sqrt{h}=1$, нет деформации $D_{ik}=0$, вращения $\Omega_{*m}=0$ и ускорения $F_i=0$. Тогда из хронометрически инвариантных уравнений Максвелла, полученных в псевдоримановом пространстве (3.63, 3.64), мы сразу получаем уравнения Максвелла классической электродинамики, записанные в покомпонентном (тензорном) виде

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial E^i}{\partial x^i}=4\pi\rho \\ &e^{ikm}\left(\frac{\partial H_{*m}}{\partial x^k}-\frac{\partial H_{*k}}{\partial x^m}\right)-\frac{1}{c}\frac{\partial E^i}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}\,j^i \end{aligned}\right\}\text{ I-я группа,} \tag{3.67}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial H^{*i}}{\partial x^i}=0 \\ &e^{ikm}\left(\frac{\partial E_m}{\partial x^k}-\frac{\partial E_k}{\partial x^m}\right)-\frac{1}{c}\frac{\partial H^{*i}}{\partial t}=0 \end{aligned}\right\}\text{ II-я группа.} \tag{3.68}$$

Причем, если записать эти уравнения в векторном виде, они станут аналогичными классическим уравнениям Максвелла в трехмерном евклидовом пространстве (3.31).

Кроме того, из полученных хронометрически инвариантных уравнений Максвелла в псевдоримановом пространстве (3.64) видно, что при отсутствии вращения пространства хронометрически инвариантная математическая дивергенция магнитного поля равна нулю ${}^*\nabla_i\, H^{*i}=0$. Иначе говоря, магнитное поле в голономном пространстве сохраняется. Однако дивергенция электрического поля в этом случае не равна нулю ${}^*\nabla_i\, E^i=4\pi\rho$ (3.63), т.е. электрическое поле неразрывно связано с плотностью электрических зарядов ρ. Отсюда можно сделать вывод, что "магнитный заряд", если он действительно существует, непосредственно связан с полем вращения самого пространства.

§ 3.4 Четырехмерные уравнения Даламбера для электромагнитного потенциала и их наблюдаемые компоненты

Как мы уже упоминали, оператор Даламбера, примененный к полю, представляет собой уравнения распространения волн этого поля. Таким образом, уравнения Даламбера для скалярного электромагнитного потенциала φ суть уравнения распространения волн скалярного поля φ, а для трехмерного вектор-потенциала $\vec{A}$ это уравнения распространения волн трехмерного векторного поля $\vec{A}$.

Вывод общековариантной формы этих уравнений для четырехмерного потенциала электромагнитного поля приведен в книге К. П. Станюковича [26]. Используя 1-ю группу общековариантных уравнений Максвелла $\nabla_{\sigma} F^{\mu\sigma} = \frac{4\pi}{c} j^{\mu}$ (3.51) и условие Лоренца $\nabla_{\sigma} A^{\sigma} = 0$ (3.41), он получает общековариантное уравнение относительно четырехмерного потенциала A^{α} электромагнитного поля

$$\Box A^{\alpha} - R^{\alpha}_{\beta} A^{\beta} = -\frac{4\pi}{c}\, j^{\alpha}, \tag{3.69}$$

где $R^{\alpha}_{\beta} = g^{\alpha\mu} R^{\sigma}_{\cdot\mu\beta\sigma}$ тензор Риччи и $R^{\alpha}_{\cdot\mu\beta\sigma}$ четырехмерный тензор кривизны Римана-Кристоффеля.

Член $R^{\alpha}_{\beta} A^{\beta}$ в левой части отсутствует, если тензор Риччи равен нулю, т.е. метрика пространства удовлетворяет уравнениям Эйнштейна вне масс (в вакууме). Данным членом можно также пренебречь в том случае, когда кривизна пространства очень мала. Однако, даже в плоском пространстве Минковского, эту задачу можно рассмотреть при наличии ускорения и вращения. Даже такое приближение может проявить, например, влияние ускорения и вращения тела отсчета на наблюдаемую скорость распространения электромагнитных волн.

Все эти соображения мы приводим здесь потому, что задача вывода хронометрически инвариантных проекций уравнений Даламбера в полном виде является очень трудоемкой. Уравнения будут чрезвычайно громоздкими, чтобы можно было получить какие-либо однозначные выводы. Поэтому здесь мы ограничимся выводом хронометрически инвариантных уравнений Даламбера для электромагнитного поля в неинерциальной системе отсчета пространства Минковского. Впрочем, это не касается всех остальных параграфов этой главы.

Вычисляя хронометрически инвариантные проекции четырехмерных уравнений Даламбера

$$\Box A^{\alpha} = -\frac{4\pi}{c}\, j^{\alpha}. \tag{3.70}$$

С помощью общих формул (2.168, 2.169) и учитывая, что наблюдаемая плотность заряда $\rho = \frac{1}{c\sqrt{g_{00}}}\, g_{0\alpha} j^{\alpha}$, получаем

$$\begin{gathered} {}^*\Box\varphi - \frac{1}{c^3}\frac{{}^*\partial}{\partial t}\left(F_k q^k\right) - \frac{1}{c^3}\, F_i\,\frac{{}^*\partial q^i}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\, F^i\,\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^i} + h^{ik}\Delta^m_{ik}\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^m} - \\ - h^{ik}\,\frac{1}{c}\,\frac{{}^*\partial}{\partial x^i}\left(A_{kn} q^n\right) + \frac{1}{c}\, h^{ik}\Delta^m_{ik} A_{mn} q^n = 4\pi\rho\,, \end{gathered} \tag{3.71}$$

$$
\begin{aligned}
&{}^*\Box A^i + \frac{1}{c^2}\frac{{}^*\partial}{\partial t}\left(A_{k\cdot}^{\cdot i} q^k\right) + \frac{1}{c^2}A_{k\cdot}^{\cdot i}\frac{{}^*\partial q^k}{\partial t} - \frac{1}{c^3}\frac{{}^*\partial\left(\varphi F^i\right)}{\partial t} - \\
&\quad - \frac{1}{c^3}F^i\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{c^2}F^k\frac{{}^*\partial q^i}{\partial x^k} - \frac{1}{c}A^{mi}\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^m} + \frac{1}{c^2}\Delta_{km}^i q^m F^k - \\
&\quad - h^{km}\left\{\frac{{}^*\partial}{\partial x^k}\left(\Delta_{mn}^i q^n\right) + \frac{1}{c}\frac{{}^*\partial}{\partial x^k}\left(\varphi A_{m\cdot}^{\cdot i}\right) + \right. \\
&\quad + \left(\Delta_{kn}^i\Delta_{mp}^n - \Delta_{km}^n\Delta_{np}^i\right)q^p + \frac{\varphi}{c}\left(\Delta_{kn}^i A_{m\cdot}^{\cdot n} - \Delta_{km}^n A_{n\cdot}^{\cdot i}\right) + \\
&\quad \left. + \Delta_{kn}^i\frac{{}^*\partial q^n}{\partial x^m} - \Delta_{km}^n\frac{{}^*\partial q^i}{\partial x^n}\right\} = \frac{4\pi}{c}\,j^i.
\end{aligned}
\tag{3.72}
$$

Отсюда видно, что наличие физических характеристик пространства отсчета F^i, A_{ik}, D_{ik} и криволинейного характера трехмерных траекторий (характеризуемого величинами Δ_{km}^i) являются как бы дополнительными "источниками", которые наряду с чисто электромагнитными источниками φ и j^i формируют волны, бегущие по электромагнитному полю.

Теперь проанализируем эти результаты. Вначале рассмотрим полученные уравнения (3.71, 3.72) в инерциальной (галилеевой) системе отсчета в плоском пространстве Минковского. В этом случае метрика имеет вид (3.5) и поэтому хронометрически инвариантный оператор Даламбера ${}^*\Box$ (2.163) принимает вид обычного оператора Даламбера ${}^*\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = \Box$. Тогда полученная нами система уравнений (3.71, 3.72) принимает вид

$$
\Box\varphi = 4\pi\rho\,, \qquad \Box q^i = -\frac{4\pi}{c}\,j^i, \tag{3.73}
$$

что полностью соответствует уравнениям классической электродинамики (3.39–3.40).

Теперь вновь вернемся к полученным хронометрически инвариантным уравнениям Даламбера (3.71, 3.72). Чтобы облегчить их анализ, обозначим совокупность членов в левых частях после хронометрически инвариантного оператора Даламбера величиной T в скалярном уравнении (3.39) и величиной B^i в векторном уравнении (3.40). Затем, перенеся эти величины в правые части уравнений и раскрыв выражения для оператора ${}^*\Box$ (2.163), получаем

$$
\frac{1}{c^2}\frac{{}^*\partial^2\varphi}{\partial t^2} - h^{ik}\,{}^*\nabla_i\,{}^*\nabla_k\,\varphi = T + 4\pi\rho\,, \tag{3.74}
$$

$$
\frac{1}{c^2}\frac{{}^*\partial^2 q^i}{\partial t^2} - h^{mk}\,{}^*\nabla_m\,{}^*\nabla_k\,q^i = B^i + \frac{4\pi}{c}j^i, \tag{3.75}
$$

где $h^{ik}\,{}^*\nabla_i\,{}^*\nabla_k = {}^*\Delta$ хронометрически инвариантный оператор Лапласа. Получились две группы хронометрически инвариантных уравнений распространения волн поля с источником: для скалярного потенциала (3.74) и вектор -потенциала (3.75) электромагнитного поля, соответственно. Из структуры их частей видно: когда потенциалы φ и являются стационарными (т.е. не зависят от времени), то волновые уравнения Даламбера превращаются в уравнения Лапласа, описывающие статические состояния поля

$$ {}^*\Delta\varphi = T + 4\pi\rho\,, \tag{3.76}$$

$$ {}^*\Delta q^i = B^i + \frac{4\pi}{c}\,j^i. \tag{3.77}$$

Поле является однородным в каком-либо направлении, если его обычная производная в этом направлении равна нулю. В римановом пространстве поле однородно, ели его абсолютная (общековариантная) производная равна нулю. При проектировании на пространство и на время в сопутствующей системе отсчета неоднородность тензорного поля характеризует отличие от хронометрически инвариантного оператора ${}^*\nabla_i$ (см. детали в публикациях Зельманова). Иначе говоря, если для какой-то (например, скалярной) величины A выполняется условие ${}^*\nabla_i\,A = 0$, то это поле *наблюдается* как однородное.

Таким образом хронометрически инвариантный оператор Даламбера ${}^*\Box$ есть разность квадратов оператора $\frac{1}{c}\frac{{}^*\partial}{\partial t}$, характеризующего наблюдаемую нестационарность данного поля и оператора ${}^*\nabla_i$, характеризующего его наблюдаемую неоднородность. Если поле одновременно стационарно и однородно, то левые части уравнений Даламбера (3.74, 3.75) равны нулю, остаются лишь одни источники тока в правых частях. Это означает, что данное поле не генерирует волн, т.е. не является волновым. При неоднородном стационарном поле (${}^*\nabla_i \neq 0$, $\frac{1}{c}\frac{{}^*\partial}{\partial t} = 0$) уравнения Даламбера (3.74, 3.75) описывают стоячую волну

$$ -\,h^{ik}\,{}^*\nabla_i\,{}^*\nabla_k\,\varphi = T + 4\pi\rho\,, \tag{3.78}$$

$$ -\,h^{mk}\,{}^*\nabla_m{}^*\nabla_k\,q^i = B^i + \frac{4\pi}{c}\,j^i. \tag{3.79}$$

При однородном нестационарном поле (${}^*\nabla_i = 0$, $\frac{1}{c}\frac{{}^*\partial}{\partial t} \neq 0$) уравнения Даламбера описывают изменение данного поля во времени в зависимости от состояния источников

$$ \frac{1}{c^2}\frac{{}^*\partial^2\varphi}{\partial t^2} = T + 4\pi\rho\,, \tag{3.80}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{{}^*\partial^2 q^i}{\partial t^2} = B^i + \frac{4\pi}{c}\,j^i. \tag{3.81}$$

В инерциальной системе отсчета, когда символы Кристоффеля равны нулю и, соответственно, ${}^*\nabla_i\,\varphi = \frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^i}$, хронометрически инвариантное скалярное уравнение Даламбера (3.74) принимает вид

$$\frac{1}{c^2}\frac{{}^*\partial^2\varphi}{\partial t^2} - h^{ik}\frac{{}^*\partial^2\varphi}{\partial x^i\,\partial x^k} = T + 4\pi\rho\,. \tag{3.82}$$

В этом случае левая часть принимает наиболее простой вид, что позволяет более детально исследовать уравнение Даламбера для скалярного поля. Причем, как известно из теории колебаний в математической физике, в обычных (не хронометрически инвариантных) уравнениях Даламбера

$$\Box\varphi = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + g^{ik}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i\partial x^k} \tag{3.83}$$

член a представляет собой абсолютную величину трехмерной скорости упругих волнений, распространяющихся по данному полю φ.

Раскрывая хронометрически инвариантные производные по пространственным координатам (3.46), преобразуем скалярное уравнение Даламбера к виду

$$\begin{gathered}\frac{1}{c^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{{}^*\partial^2\varphi}{\partial t^2} - h^{ik}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i\,\partial x^k} + \frac{2v^k}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^k\,\partial t} + \\ + \frac{1}{c^2-\mathrm{w}}\,h^{ik}\frac{\partial v_k}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\,v^k F_k\,\frac{\partial\varphi}{\partial t} = T + 4\pi\rho\,,\end{gathered} \tag{3.84}$$

где $v^2 = h_{ik}v^i v^k$ и вторая хронометрически инвариантная производная по времени выражается через обычные производные как

$$\frac{{}^*\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{1}{\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^3}\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,. \tag{3.85}$$

Отсюда видно: чем больше квадрат скорости вращения пространства v^2, тем меньшее влияние на распространение волн оказывает хронометрически инвариантная (наблюдаемая) нестационарность поля $\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial t}$. В пределе, когда $v\to c$, оператор Даламбера преобразуется в оператор Лапласа, т.е. волновое уравнение Даламбера трансформируется в стационарное уравнение Лапласа. При малых скоростях вращения пространства $v \ll c$ можно сказать, что наблюдаемые волны поля скалярного потенциала распространяются со

скоростью света. В общем случае абсолютная величина наблюдаемой скорости распространения волн скалярного электромагнитного потенциала $\mathrm{v}_{(\varphi)}$ получается равной

$$\mathrm{v}_{(\varphi)}=\frac{c}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\,. \tag{3.86}$$

Исследуя выражение для хронометрически инвариантной величины (3.85), представляющей собой наблюдаемое ускорения "наращивания" во времени скалярного потенциала φ, мы видим, что оно отличается от координатного ускорения тем сильнее, чем больше гравитационный потенциал и чем больше скорость его изменения во времени

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2\frac{{}^*\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\frac{1}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,. \tag{3.87}$$

В пределе, когда $\mathrm{w}\rightarrow c^2$ (приближение к гравитационному коллапсу), наблюдаемое ускорение "наращивания" скалярного потенциала поля становится исчезающе малым, а координатная скорость увеличения потенциала $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$, наоборот, становится бесконечно большой. Однако в обычных условиях гравитационный потенциал w вносит лишь небольшие поправки в ускорение и скорость наращивания потенциала φ.

Все вышесказанное о наблюдаемой скалярной величине $\frac{{}^*\partial^2\varphi}{\partial t^2}$ справедливо также и для векторной наблюдаемой величины $\frac{{}^*\partial^2 q^i}{\partial t^2}$, поскольку хронометрически инвариантный оператор Даламбера ${}^*\Box=\frac{1}{c^2}\frac{{}^*\partial^2}{\partial t^2}-h^{ik}\frac{{}^*\partial^2}{\partial x^i\partial x^k}$ отличается от скалярной и векторной функций лишь во втором члене — операторе Лапласа, в котором хронометрически инвариантные производные от скаляра и вектора различаются между собой

$${}^*\nabla_i\,\varphi=\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^i}\,,\qquad {}^*\nabla_i\,q^k=\frac{{}^*\partial q^k}{\partial x^i}+\Delta^k_{im}q^m. \tag{3.88}$$

Если скорость вращения пространства и гравитационный потенциал являются пренебрежимо малыми, то хронометрически инвариантный оператор Даламбера для скалярного потенциала принимает упрощенный вид, с простыми производными вместо хронометрически инвариантных,

$${}^*\Box\varphi=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-h^{ik}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i\partial x^k}\,, \tag{3.89}$$

и электромагнитные волны, создаваемые скалярным потенциалом φ, распространяются со скоростью света.

§ 3.5 Хронометрически инвариантная сила Лоренца. Тензор энергии-импульса электромагнитного поля

В этом параграфе мы выведем выражения для физических наблюдаемых компонент четырехмерной силы, действующей со стороны электромагнитного поля на электрический заряд в псевдоримановом пространстве. Эта задача будет решена для двух случаев: 1) для точечного заряда; 2) для заряда, распределенного в пространстве. Кроме того, в этом же параграфе мы вычислим физические наблюдаемые компоненты тензора энергии-импульса электромагнитного поля.

В трехмерном евклидовом пространстве классической электродинамики движение заряженной пробной частицы характеризуется векторным уравнением

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\left[\,\vec{u};\vec{H}\,\right], \tag{3.90}$$

где $\vec{p} = m\vec{u}$ трехмерный вектор импульса частицы и m ее релятивистская масса. Выражение, стоящее в правой части этого уравнения, называется *силой Лоренца.* Уравнение, характеризующее изменение кинетической (релятивистской) энергии заряженной частицы

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \tag{3.91}$$

как следствие работы, произведенной электрическим полем по ее перемещению, имеет вид

$$\frac{dE}{dt} = e\vec{E}\,\vec{u} \tag{3.92}$$

и иначе называется *теоремой живых сил.*

В четырехмерной форме, благодаря объединению энергии и импульса, в галилеевой системе отсчета пространства Минковского оба эти уравнения (3.90, 3.92) записываются следующим образом

$$m_0 c\,\frac{dU^\alpha}{ds} = \frac{e}{c}\,F^{\alpha\cdot}_{\cdot\sigma}U^\sigma, \qquad U^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds} \tag{3.93}$$

и называются *уравнениями Минковского* (здесь $F^{\alpha\cdot}_{\cdot\sigma}$ тензор электромагнитного поля).

Так как в этом случае метрика имеет простой диагональный вид (3.5), то

$$ds = c\,dt\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\,, \quad u^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2, \tag{3.94}$$

и компоненты четырехмерной скорости частицы U^{α} равны

$$U^0 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\,, \qquad U^i = \frac{u^i}{c\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\,, \tag{3.95}$$

где $u^i = \frac{dx^i}{dt}$ трехмерная координатная скорость частицы. Так как компоненты $\frac{e}{c}F^{\alpha\cdot}_{\cdot\sigma}U^{\sigma}$ в галилеевой системе отсчета

$$\frac{e}{c}\,F^{0\cdot}_{\cdot\sigma}U^{\sigma} = -\frac{e}{c^2}\frac{E_i u^i}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\,, \tag{3.96}$$

$$\frac{e}{c}\,F^{i\cdot}_{\cdot\sigma}U^{\sigma} = -\frac{1}{c\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\left(eE^i + \frac{e}{c}\,e^{ikm}u_k H_{*m}\right), \tag{3.97}$$

то временная (скалярная) и пространственные (векторные) компоненты уравнений Минковского (3.93) имеют вид (также в галилеевой системе отсчета)

$$\frac{dE}{dt} = -eE_i u^i, \tag{3.98}$$

$$\frac{dp^i}{dt} = -\left(eE^i + \frac{e}{c}\,e^{ikm}u_k H_{*m}\right), \qquad p^i = mu^i. \tag{3.99}$$

Полученные релятивистские уравнения с точностью до знака в правой части совпадают с теоремой живых сил и уравнениями движения заряженной частицы классической электродинамики (3.90, 3.91). Причем различие знаков в правых частях обусловлено лишь выбором сигнатурных условий: мы используем сигнатуру пространства-времени $(+---)$, но, если выбрать сигнатуру $(-+++)$, то в правых частях полученных уравнений знак сменится на противоположный.

Перейдем теперь к хронометрически инвариантному представлению в псевдоримановом пространстве четырехмерного вектора импульса $\Phi^{\alpha} = \frac{e}{c}F^{\alpha\cdot}_{\cdot\sigma}U^{\sigma}$, приобретаемого частицей за счет взаимодействия ее заряда e с электромагнитным полем.

Согласно теории хронометрических инвариантов, его наблюдаемыми проекциями являются величины

$$T = \frac{e}{c}\,\frac{F_{0\sigma}U^{\sigma}}{\sqrt{g_{00}}}\,, \tag{3.100}$$

$$B^i = \frac{e}{c}\,F^{i\cdot}_{\cdot\sigma}U^{\sigma} = \frac{e}{c}\left(F^{i\cdot}_{\cdot 0}U^0 + F^{i\cdot}_{\cdot k}U^k\right) \tag{3.101}$$

так как в псевдоримановом пространстве компоненты четырехмерного вектора скорости частицы

$$U^0 = \frac{\frac{1}{c^2}\, v_i \mathrm{v}^i \pm 1}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)}\,, \qquad U^i = \frac{\mathrm{v}^i}{c\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\,, \tag{3.102}$$

где v^i ее трехмерная наблюдаемая скорость, то, учитывая полученные нами во 2-й главе выражения для компонент ротора (2.143–2.159), получаем

$$T = -\frac{e}{c^2\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\left(\frac{^*\partial\varphi}{\partial x^i} + \frac{1}{c}\frac{^*\partial q_i}{\partial t} - \frac{\varphi}{c^2}\,F_i\right)\mathrm{v}^i, \tag{3.103}$$

$$\begin{gathered} B^i = -\frac{e}{c^2\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\left\{\pm\left(\frac{^*\partial\varphi}{\partial x^k} + \frac{1}{c}\frac{^*\partial q_k}{\partial t} - \frac{\varphi}{c^2}\,F_k\right)h^{ik} + \right. \\ \left. + \left[h^{im}h^{kn}\left(\frac{^*\partial q_m}{\partial x^n} - \frac{^*\partial q_n}{\partial x^m}\right) - \frac{2\varphi}{c}\,A^{ik}\right]\mathrm{v}_k\right\}. \end{gathered} \tag{3.104}$$

Скаляр T, с точностью до множителя $-\frac{1}{c^2}$, представляет собой работу поля по перемещению заряда e в псевдоримановом пространстве. Вектор B^i с точностью до множителя $\frac{1}{c}$ в нерелятивистском случае представляет собой обычную силу, действующую на заряженную частицу со стороны электромагнитного поля в псевдоримановом пространстве

$$\Phi^i = cB^i = -e\left(E^i + \frac{1}{c}\,\varepsilon^{ikm}H_{*m}\mathrm{v}_k\right), \tag{3.105}$$

и является наблюдаемой силой Лоренца.

Причем знакопеременность в наших уравнениях получается из-за того, что в псевдоримановом пространстве квадратное уравнение относительно $\frac{dt}{d\tau}$ имеет два корня (1.55). Соответственно, знак “плюс” в силе Лоренца имеет место при движении частиц в будущее (относительно наблюдателя) и знак “минус” — при движении частицы в прошлое. В галилеевой системе отсчета пространства Минковского нет различия между физическим наблюдаемым временем τ и координатным временем t, поэтому в уравнении для силы Лоренца (3.99), получаемой из уравнения Минковского, знакопеременность отсутствует. Если заряд не является точечным, а непрерывно распределен в пространстве, то сила Лоренца $\Phi^\alpha = \frac{e}{c} F^{\alpha\cdot}_{\cdot\sigma} U^\sigma$ в уравнениях Минковского (3.93) заменяется на четырехмерный вектор

плотности силы Лоренца

$$f^{\alpha} = \frac{1}{c}\, F^{\alpha\cdot}_{\cdot\sigma}\, j^{\sigma}, \tag{3.106}$$

где четырехмерный вектор плотности тока $j^{\sigma} = \left\{c\rho;\; j^{i}\right\}$ определяется из уравнений Максвелла (3.51)

$$j^{\sigma} = \frac{c}{4\pi}\, \nabla_{\mu}\, F^{\sigma\mu}. \tag{3.107}$$

Физические наблюдаемые компоненты вектора плотности силы Лоренца f^{α} имеют вид

$$\frac{f_0}{\sqrt{g_{00}}} = -\frac{1}{c}\, E_i\, j^{i}, \tag{3.108}$$

$$f^{i} = -\left(\rho E^{i} + \frac{1}{c}\, H^{i\cdot}_{\cdot k}\, j^{k}\right) = -\left(\rho E^{i} + \frac{1}{c}\, \varepsilon^{ikm} H_{*m}\, j_{k}\right). \tag{3.109}$$

В галилеевой системе отсчета пространства Минковского временная и пространственная проекции вектора плотности тока (3.109) принимают вид

$$\frac{f_0}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{q}{c} = \frac{1}{c}\, \vec{E}\,\vec{j}\,, \tag{3.110}$$

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + \frac{1}{c}\left[\,\vec{j}; \vec{H}\,\right], \tag{3.111}$$

где q плотность тепловой мощности, выделяемой в проводниках с током, и плотность силы Лоренца (3.106), действующей на распределенные заряды.

Теперь преобразуем плотность силы Лоренца с помощью уравнений Максвелла. Подставляя j^{σ} (3.107) из 1-й группы общековариантных уравнений Максвелла, получаем

$$f_{\nu} = \frac{1}{c} F_{\nu\sigma} j^{\sigma} = \frac{1}{4\pi} F_{\nu\sigma} \nabla_{\mu} F^{\sigma\mu} = \frac{1}{4\pi}\Big[\nabla_{\mu}\left(F_{\nu\sigma}F^{\sigma\mu}\right) - F^{\sigma\mu}\nabla_{\mu}F_{\nu\sigma}\Big]. \tag{3.112}$$

Переставляя индексы μ и σ, (иначе называемые немыми или свободными индексами), по которым производится суммирование, и учитывая антисимметричность тензора Максвелла $F_{\alpha\beta}$, приводим второе слагаемое к виду

$$\begin{aligned} F^{\sigma\mu}\,\nabla_{\mu}\,F_{\nu\sigma} &= \frac{1}{2}\, F^{\sigma\mu}\left(\nabla_{\mu}\,F_{\nu\sigma} + \nabla_{\sigma}\,F_{\mu\nu}\right) = \\ &= -\frac{1}{2}\, F^{\sigma\mu}\,\nabla_{\nu}\,F_{\mu\sigma} = \frac{1}{2}\, F^{\sigma\mu}\,\nabla_{\nu}\,F_{\sigma\mu}\,. \end{aligned} \tag{3.113}$$

В результате получаем для f_ν (3.112) выражение

$$f_\nu = \frac{1}{4\pi}\,\nabla_\mu\left(-F^{\mu\sigma}F_{\nu\sigma} + \frac{1}{4}\,\delta^\mu_\nu\,F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right), \tag{3.114}$$

или, в контравариантной форме,

$$f^\nu = \nabla_\mu\left[\frac{1}{4\pi}\left(-F^{\mu\sigma}F^{\nu\cdot}_{\cdot\sigma} + \frac{1}{4}\,g^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right)\right]. \tag{3.115}$$

Обозначая величину

$$\frac{1}{4\pi}\left(-\,F^{\mu\sigma}F^{\nu\cdot}_{\cdot\sigma} + \frac{1}{4}\,g^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right) = T^{\mu\nu}, \tag{3.116}$$

получаем

$$f^\nu = \nabla_\mu T^{\mu\nu}, \tag{3.117}$$

т.е. четырехмерный вектор плотности силы Лоренца f^ν равен абсолютной дивергенции величины $T^{\mu\nu}$, называемой *тензором энергии-импульса электромагнитного поля*. Из его структуры видно, что он является симметричным $T^{\mu\nu}\!=\!T^{\nu\mu}$, а его след равен нулю (т.к. след фундаментального метрического тензора $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\!=\!\delta^\nu_\nu\!=\!4$)

$$\begin{aligned} T^\nu_\nu = g_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(-\,F^{\mu\sigma}F_{\mu\sigma} + \frac{1}{4}\,g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right) = \\ = \frac{1}{4\pi}\left(-\,F^{\mu\sigma}F_{\mu\sigma} + F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right) = 0\,. \end{aligned} \tag{3.118}$$

Физическими наблюдаемыми компонентами тензора энергии-импульса являются величины

$$q = \frac{T_{00}}{g_{00}}\,, \qquad J^i = \frac{c\,T^i_0}{\sqrt{g_{00}}}\,, \qquad U^{ik} = c^2T^{ik}, \tag{3.119}$$

где q наблюдаемая *плотность поля*, J^i вектор наблюдаемой *плотности импульса*, и U^{ik} *тензор наблюдаемых напряжений* поля. Вычисляя эти величины для тензора энергии-импульса электромагнитного поля (3.116), получаем

$$q = \frac{E^2 + H^{*2}}{8\pi}\,, \tag{3.120}$$

$$J^i = \frac{c}{4\pi}\,\varepsilon^{ikm}E_kH_{*m}\,, \tag{3.121}$$

$$U^{ik} = qc^2h^{ik} - \frac{c^2}{4\pi}\left(E^iE^k + H^{*i}H^{*k}\right), \tag{3.122}$$

где $E^2 = h_{ik} E^i E^k$ и $H^{*2} = h_{ik} H^{*i} H^{*k}$. Сравнивая выражения для q (3.120) с плотностью энергии электромагнитного поля из классической электродинамики

$$W = \frac{E^2 + H^2}{8\pi}\,, \tag{3.123}$$

где $E^2 = (\vec{E};\vec{E})$ и $H^2 = (\vec{H};\vec{H})$; мы видим, что вычисленная нами хронометрически инвариантная величина q представляет собой наблюдаемую плотность энергии электромагнитного поля в псевдоримановом пространстве. Сопоставив выражения для хронометрически инвариантного вектора J^i (3.121) с вектором Пойнтинга классической электродинамики

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\left(\vec{E};\vec{H}\right), \tag{3.124}$$

мы видим, что J^i представляет собой наблюдаемый вектор Пойнтинга в псевдоримановом пространстве. Соответствие третьей наблюдаемой компоненты U^{ik} (3.122) с величинами классической электродинамики устанавливается по аналогии с механикой сплошных сред, в которой трехмерный тензор аналогичной структуры является *тензором напряжений* элемента объема поля. Таким образом, U^{ik} есть хронометрически инвариантный тензор напряжений электромагнитного поля в псевдоримановом пространстве. Теперь мы можем получить тождества для хронометрически инвариантных компонент вектора плотности силы Лоренца, правые части которых уже выражены через плотность заряда и плотность тока (3.108, 3.109), т.е. через источники электромагнитного поля, а левые части с помощью уравнения $f^\nu = \nabla_\mu T^{\mu\nu}$ мы выразим через наблюдаемые компоненты тензора энергии-импульса электромагнитного поля (3.120–3.122). Используя готовые формулы для наблюдаемых компонент абсолютной дивергенции симметричного тензора 2-го ранга (2.138, 2.139), получаем

$$\frac{{}^*\partial q}{\partial t} + qD + \frac{1}{c^2}\,D_{ij}U^{ij} + {}^*\widetilde{\nabla}_i\,J^i - \frac{1}{c^2}\,F_iJ^i = -\frac{1}{c}\,E_i\,j^i, \tag{3.125}$$

$$\begin{gathered}\frac{{}^*\partial J^k}{\partial t} + DJ^k + 2\left(D^k_i + A^{k\cdot}_{\cdot i}\right)J^i + {}^*\widetilde{\nabla}_i\,U^{ik} - qF^k = \\ = -\left(\rho E^k + \frac{1}{c}\,\varepsilon^{kim}H_{*i}\,j_m\right).\end{gathered} \tag{3.126}$$

Из первого хронометрически инвариантного тождества (3.125) видно: когда наблюдаемый вектор плотности тока j^i ортогонален

вектору напряженности электрического поля E^i, правая часть обращается в нуль. В общем случае, т.е. при произвольной ориентации векторов j^i и E^i, наблюдаемое изменение во времени плотности электромагнитного поля $\frac{^*\partial q}{\partial t}$ определяется следующими факторами:

1) скоростью изменения наблюдаемого эталонного объема, занимаемого электромагнитным полем (член qD);
2) изменением наблюдаемого напряжения поля под действием поверхностных сил объемной деформации на границах элемента объема (член $D_{ij}U^{ij}$);
3) влиянием гравитационно-инерциальной силы, увеличивающей или уменьшающей наблюдаемую плотность импульса поля (член $F_i J^i$);
4) наблюдаемым "перепадом" (дивергенцией) плотности импульса поля (член $^*\widetilde{\nabla}_i J^i$);
5) величинами и взаимной ориентацией вектора плотности тока j^i и вектора электрической напряженности E^i.

Из второго хронометрически инвариантного тождества (3.126) видно, что наблюдаемое изменение во времени вектора плотности импульса электромагнитного поля, т.е. величина $\frac{^*\partial J^k}{\partial t}$, определяется факторами:

1) скоростью изменения наблюдаемого эталонного объема пространства (член DJ^k);
2) изменением деформационных и кориолисовых сил самого пространства, учитываемых членом $2\left(D_i^k + A_{\cdot i}^{k\cdot}\right)J^i$;
3) влиянием гравитационно-инерциальной силы на наблюдаемую плотность поля (член qF^k);
4) наблюдаемой "пространственной вариацией" напряжений поля $^*\widetilde{\nabla}_i U^{ik}$;
5) наблюдаемой плотностью силы Лоренца (правая часть тождества, определяемая величиной $f^i = -\left(\rho E^k + \frac{1}{c}\,\varepsilon^{kim} H_{*i}\, j_m\right)$.

И, в заключение, рассмотрим частный случай, когда электромагнитное поле является изотропным. Формальное определение изотропного поля через тензор Максвелла представляет собой совокупность условий [20]

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 0\,, \qquad F_{\mu\nu}F^{*\mu\nu} = 0\,, \tag{3.127}$$

и означает, что оба инварианта поля $J_1 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ и $J_2 = F_{\mu\nu}F^{*\mu\nu}$ (3.25, 3.26) равны нулю. В хронометрически инвариантной записи,

с учетом (3.28), эти условия принимают вид

$$E^2 = H^{*2}, \qquad E_i H^{*i} = 0\,. \tag{3.128}$$

Отсюда видно, что электромагнитное поле в псевдоримановом пространстве наблюдается как изотропное, если в системе отсчета наблюдателя трехмерные длины векторов напряженностей электрического и магнитного полей равны между собой, а вектор Пойнтинга J^i (3.121) равен нулю

$$J^i = \frac{c}{4\pi}\,\varepsilon^{ikm} E_k H_{*m}\,. \tag{3.129}$$

В терминах наблюдаемых компонент тензора энергии-импульса (3.120, 3.121) полученные условия (3.128) также означают, что

$$J = cq\,, \tag{3.130}$$

где $J = \sqrt{J^2}$ и $J^2 = h_{ik} J^i J^k$. Иначе говоря, длина J наблюдаемого вектора плотности импульса изотропного электромагнитного поля зависит только от плотности самого поля q.

§3.6 Вывод уравнений движения заряженной частицы методом параллельного переноса

В этом параграфе мы выведем хронометрически инвариантные динамические уравнения движения пробной заряженной массовой частицы в четырехмерном псевдоримановом пространстве. Естественно, подразумевается, что в пространстве присутствует также и электромагнитное поле. В принципе, приведенным здесь методом можно вывести и уравнения движения заряженной частицы, не являющейся пробной*.

Итак, искомые уравнения суть хронометрически инвариантные проекции на время и на пространство общековариантных уравнений параллельного переноса четырехмерного суммарного вектора

$$Q^\alpha = P^\alpha + \frac{e}{c^2}\,A^\alpha, \tag{3.131}$$

где $P^\alpha = m_0 \frac{dx^\alpha}{ds}$ четырехмерный динамический вектор частицы, движущейся (в данном случае) по негеодезической траектории, и $\frac{e}{c^2}A^\alpha$ четырехмерный импульс, приобретаемый частицей за счет взаимо-

*Частица называется пробной, если ее заряд и масса настолько малы, что не влияют на электромагнитное и гравитационное поле, в которых она движется. Массовыми, т.е. обладающими ненулевой массой, называются частицы, движущиеся вдоль неизотропных траекторий.

действия ее заряда e с электромагнитным полем A^α и отклоняющий ее траекторию от геодезической линии. В такой постановке задачи параллельный перенос суперпозиции негеодезического собственного вектора частицы и отклоняющего вектора является геодезическим

$$\frac{d}{ds}\left(P^\alpha + \frac{e}{c^2}A^\alpha\right) + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\left(P^\mu + \frac{e}{c^2}A^\mu\right)\frac{dx^\nu}{ds} = 0\,. \qquad (3.132)$$

По определению, геодезическая линия — это линия неизменного направления, т.е. линия, при параллельном переносе вдоль которой всякий вектор, касательный к ней в некоторой точке, остается касательным вдоль всей линии.

Уравнения движения частицы можно получить и другим способом, рассматривая движение вдоль линий наименьшей (экстремальной) длины с помощью принципа наименьшего действия. Таким образом, линии экстремальной длины одновременно являются и линиями неизменного направления. Однако, например, в пространствах с неметрической геометрией понятие длины не определено, следовательно, не определены и линии экстремальной длины, так что вывести уравнения движения методом наименьшего действия невозможно. Тем не менее, даже в неметрической геометрии можно определить линии неизменного направления и параметр дифференцирования вдоль них. Поэтому можно сказать, что в метрических пространствах, к которым относится и риманово пространство, линии экстремальной длины представляют собой лишь частный случай линий неизменного направления.

Итак, общие формулы для хронометрически инвариантных проекций уравнений параллельного переноса, полученные нами во 2-й главе, имеют вид

$$\frac{d\tilde{\varphi}}{ds} + \frac{1}{c}\left(-F_i\,\tilde{q}^i\,\frac{d\tau}{ds} + D_{ik}\,\tilde{q}^i\,\frac{dx^k}{ds}\right) = 0\,, \qquad (3.133)$$

$$\frac{d\tilde{q}^i}{ds} + \left(\frac{\tilde{\varphi}}{c}\frac{dx^k}{ds} + \tilde{q}^k\frac{d\tau}{ds}\right)\left(D^i_k + A^{\cdot i}_{k\cdot}\right) - \frac{\tilde{\varphi}}{c}F^i\frac{d\tau}{ds} + \Delta^i_{mk}\,\tilde{q}^m\,\frac{dx^k}{ds} = 0\,, \qquad (3.134)$$

где $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{q}^i$ наблюдаемые проекции суммарного вектора заряженной частицы Q^α (3.131) на время и на пространство

$$\tilde{\varphi} = b_\alpha Q^\alpha = \frac{Q_0}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\left(P_0 + \frac{e}{c^2}A_0\right), \qquad (3.135)$$

$$\tilde{q}^i = h^i_\alpha Q^\alpha = Q^i = P^i + \frac{e}{c^2}A^i. \qquad (3.136)$$

Наблюдаемые проекции динамического вектора вещественной массовой частицы равны

$$\frac{P_0}{\sqrt{g_{00}}} = \pm\, m\,, \qquad P^i = \frac{1}{c}\, m\mathrm{v}^i = \frac{1}{c}\, p^i, \tag{3.137}$$

где знак "плюс" имеет место при движении частицы (относительно наблюдателя) в будущее, знак "минус" имеет место при движении частицы в прошлое, и $p^i = m\frac{dx^i}{d\tau}$ хронометрически инвариантный трехмерный импульс частицы. Наблюдаемые проекции четырехмерного импульса $\frac{e}{c^2}A^\alpha$ равны

$$\frac{e}{c^2}\frac{A_0}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{e}{c^2}\,\varphi\,, \qquad \frac{e}{c^2}\,A^i = \frac{e}{c^2}\,q^i, \tag{3.138}$$

где φ скалярный потенциал и q^i вектор-потенциал электромагнитного поля — хронометрически инвариантные компоненты четырехмерного потенциала A^α (3.8). Тогда величины $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{q}^i$, т.е. наблюдаемые проекции суммарного вектора Q^α (3.135, 3.136), принимают вид

$$\tilde{\varphi} = \pm\, m + \frac{e}{c^2}\,\varphi\,, \tag{3.139}$$

$$\tilde{q}^i = \frac{1}{c}\left(p^i + \frac{e}{c^2}\,q^i\right). \tag{3.140}$$

Теперь подставим эти значения $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{q}^i$ в общие формулы для уравнений движения (3.133, 3.134). Перенося члены, характеризующие электромагнитное взаимодействие, в правые части, мы получаем хронометрически инвариантные уравнения движения для массовой заряженной частицы нашего мира, движущейся относительно наблюдателя в будущее (прямой ход времени),

$$\frac{dm}{d\tau} - \frac{m}{c^2}F_i\mathrm{v}^i + \frac{m}{c^2}D_{ik}\,\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k = -\frac{e}{c^2}\frac{d\varphi}{d\tau} + \frac{e}{c^3}\left(F_iq^i - D_{ik}q^i\mathrm{v}^k\right), \tag{3.141}$$

$$\begin{gathered}\frac{d\left(m\mathrm{v}^i\right)}{d\tau} - mF^i + 2m\left(D^i_k + A^{\cdot i}_{k\cdot}\right)\mathrm{v}^k + m\Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k = \\ = -\frac{e}{c}\frac{dq^i}{d\tau} - \frac{e}{c}\left(\frac{\varphi}{c}\,\mathrm{v}^k + q^k\right)\left(D^i_k + A^{\cdot i}_{k\cdot}\right) + \frac{e\varphi}{c^2}F^i - \frac{e}{c}\,\Delta^i_{nk}\,q^n\mathrm{v}^k,\end{gathered} \tag{3.142}$$

а для частицы зазеркалья, движущей относительно наблюдателя в прошлое (обратный ход времени),

$$-\frac{dm}{d\tau} - \frac{m}{c^2}F_i\mathrm{v}^i + \frac{m}{c^2}D_{ik}\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k = -\frac{e}{c^2}\frac{d\varphi}{d\tau} + \frac{e}{c^3}\left(F_i\,q^i - D_{ik}q^i\mathrm{v}^k\right), \tag{3.143}$$

$$\begin{gathered}\frac{d\left(m\mathrm{v}^i\right)}{d\tau}+mF^i+m\Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k=\\=-\frac{e}{c}\frac{dq^i}{d\tau}-\frac{e}{c}\left(\frac{\varphi}{c}\,\mathrm{v}^k+q^k\right)\left(D^i_k+A^{\cdot i}_{k\cdot}\right)+\frac{e\varphi}{c^2}\,F^i-\frac{e}{c}\,\Delta^i_{nk}\,q^n\mathrm{v}^k.\end{gathered}\qquad(3.144)$$

Левые части полученных уравнений полностью совпадают с левыми частями уравнений движения свободных массовых частиц. Отличие состоит лишь в том, что в данных уравнениях стоят наблюдаемые характеристики несвободной частицы, характеризующие ее негеодезическое движение (поэтому правые части здесь не равны нулю). Правые части характеризуют воздействие на частицу электромагнитного поля (члены, содержащие φ и q^i), а также воздействие свойств пространства (гравитационно-инерциальной силы F^i, вращения A_{ik}, деформации D_{ik} и кривизны Δ^i_{nk}). Очевидно, что для незаряженной частицы ($e=0$), правые части обращаются в нуль, и эти уравнения полностью совпадают с хронометрически инвариантными уравнениями движения свободной массовой частицы в нашем мире (1.51, 1.52) и в зазеркалье (1.56, 1.57).

Теперь рассмотрим правые части более подробно. Они симметричны для частиц, движущихся в будущее и в прошлое и, при смене знака заряда на противоположный, также меняют свой знак. Обозначим T правые части временных проекций уравнений движения (3.141, 3.143). Так как величину $\frac{d\varphi}{d\tau}$ можно представить в виде

$$\frac{d\varphi}{d\tau}=\frac{^*\partial\varphi}{\partial t}+\mathrm{v}^i\frac{^*\partial\varphi}{\partial x^i}\,,\qquad(3.145)$$

то, используя выражение для хронометрически инвариантной напряженности электрического поля в ковариантной форме E_i (3.14), мы можем записать величину T в виде

$$\begin{gathered}T=-\frac{e}{c^2}\,E_i\mathrm{v}^i-\frac{e}{c^2}\frac{^*\partial\varphi}{\partial t}+\\+\frac{e}{c^3}\left(\frac{^*\partial q_i}{\partial t}-D_{ik}q^k\right)\mathrm{v}^i+\frac{e}{c^3}\left(q^i-\frac{\varphi}{c}\,\mathrm{v}^i\right)F_i\,.\end{gathered}\qquad(3.146)$$

Подставляя это выражение во временные проекции уравнений движения (3.141, 3.143) и умножая их на c^2, получаем уравнения для энергии частиц, движущихся в будущее и в прошлое, соответственно

$$\begin{gathered}\frac{dE}{d\tau}-mF_i\mathrm{v}^i+mD_{ik}\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k=-eE_i\mathrm{v}^i-e\,\frac{^*\partial\varphi}{\partial t}+\\+\frac{e}{c}\left(\frac{^*\partial q_i}{\partial t}-D_{ik}q^k\right)\mathrm{v}^i+\frac{e}{c}\left(q^i-\frac{\varphi}{c}\,\mathrm{v}^i\right)F_i\,,\end{gathered}\qquad(3.147)$$

$$-\frac{dE}{d\tau}-mF_i\mathrm{v}^i+mD_{ik}\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k=-eE_i\mathrm{v}^i-e\,\frac{^*\partial\varphi}{\partial t}+ \\ +\frac{e}{c}\left(\frac{^*\partial q_i}{\partial t}-D_{ik}q^k\right)\mathrm{v}^i+\frac{e}{c}\left(q^i-\frac{\varphi}{c}\,\mathrm{v}^i\right)F_i\,, \qquad (3.148)$$

где $E=\pm mc^2$ релятивистская энергия частицы и $eE_i\mathrm{v}^i$ работа, затраченная электрической составляющей поля на перемещение заряда за единицу времени.

Полученные временные наблюдаемые проекции уравнений движения заряженной частицы (3.147, 3.148) представляют собой *теорему живых сил* в псевдоримановом пространстве, записанную в хронометрически инвариантной форме, т.е. выраженную через физические наблюдаемые величины. Как нетрудно убедиться, в галилеевой системе отсчета наше уравнение (3.147), полученное для частиц с прямым ходом времени, принимает вид временной компоненты уравнений Минковского (3.98).

В трехмерном евклидовом пространстве полученное уравнение (3.147) преобразуется в обычную теорему живых сил классической электродинамики $\frac{dE}{dt}=e\vec{E}\vec{u}$ (3.92).

Теперь обратимся к правым частям пространственных проекций уравнений движения (3.142, 3.144). Обозначим их M^i, т.к. они одинаковы для частиц, движущихся в будущее и в прошлое, и меняют знак при изменении знака заряда частицы. Поскольку величина равна

$$\frac{dq^i}{d\tau}=\frac{^*\partial q^i}{\partial t}+\mathrm{v}^k\frac{^*\partial q^i}{\partial x^k}\,, \qquad (3.149)$$

и в ней, учитывая, что $\frac{^*\partial h^{ik}}{\partial t}=-2D^{ik}$ (1.40)

$$\frac{^*\partial q^i}{\partial t}=\frac{^*\partial}{\partial t}\left(h^{ik}q_k\right)=-2D^i_k q^k+h^{ik}\frac{^*\partial q_k}{\partial t}\,, \qquad (3.150)$$

то M^i принимает вид

$$M^i=-\frac{e}{c}\,h^{ik}\frac{^*\partial q_k}{\partial t}+\frac{e\varphi}{c^2}\left(F^i+A^{ik}\mathrm{v}_k\right)+\frac{e}{c}\,A^{ik}q_k+ \\ +\frac{e}{c}\left(q^k-\frac{\varphi}{c}\,\mathrm{v}^k\right)D^i_k-\frac{e}{c}\,\mathrm{v}^k\frac{^*\partial q^i}{\partial x^k}-\frac{e}{c}\,\Delta^i_{nk}q^n\mathrm{v}^k. \qquad (3.151)$$

Используя выражения для хронометрически инвариантных компонент тензора Максвелла E^i (3.11) и H^{ik} (3.12) $F_{\alpha\beta}$, запишем первые два члена M^i (3.151) в виде

$$-\frac{e}{c}\,h^{ik}\frac{^*\partial q_k}{\partial t}+\frac{e\varphi}{c^2}\,F^i=-\,eE^i+eh^{ik}\frac{^*\partial\varphi}{\partial x^k}\,, \qquad (3.152)$$

а третий член как

$$\frac{e\varphi}{c^2}\,A^{ik}\mathrm{v}_k = \frac{e}{2c}\,h^{im}\mathrm{v}^n\left(\frac{{}^*\partial q_m}{\partial x^n}-\frac{{}^*\partial q_n}{\partial x^m}\right)-\frac{e}{2c}\,H^{ik}\mathrm{v}_k\,. \tag{3.153}$$

Величину H^{ik} запишем как $H^{ik}=\varepsilon^{mik}H_{*m}$ (3.56). Тогда предыдущее (3.153) примет вид

$$\frac{e\varphi}{c^2}\,A^{ik}\mathrm{v}_k = \frac{e}{2c}\,h^{im}\mathrm{v}^n\left(\frac{{}^*\partial q_m}{\partial x^n}-\frac{{}^*\partial q_n}{\partial x^m}\right)-\frac{e}{2c}\,\varepsilon^{ikm}H_{*m}\mathrm{v}_k\,, \tag{3.154}$$

а исходная величина (3.151)

$$\begin{gathered}M^i = -e\left(E^i+\frac{1}{2c}\,\varepsilon^{ikm}\mathrm{v}_k H_{*m}\right)+\frac{e}{c}\left(q^k-\frac{\varphi}{c}\,\mathrm{v}^k\right)D^i_k + \\ + e h^{ik}\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^k}+\frac{e}{c}\,A^{ik}q_k+\frac{e}{2c}\,h^{im}\mathrm{v}^k\left(\frac{{}^*\partial q_m}{\partial x^k}-\frac{{}^*\partial q_k}{\partial x^m}\right)- \\ -\frac{e}{c}\,\mathrm{v}^k\frac{{}^*\partial q^i}{\partial x^k}-\frac{e}{c}\,\Delta^i_{nk}q^n\mathrm{v}^k.\end{gathered} \tag{3.155}$$

Сумму последних трех членов в M^i получаем, подставив $q_m = h_{mn}q^n$, $q_k = h_{kn}q^n$, а также выражение для хронометрически инвариантных символов Кристоффеля (1.47)

$$\begin{gathered}\frac{e}{2c}\,h^{im}\mathrm{v}^k\left(\frac{{}^*\partial q_m}{\partial x^k}-\frac{{}^*\partial q_k}{\partial x^m}\right)-\frac{e}{c}\,\mathrm{v}^k\frac{{}^*\partial q^i}{\partial x^k}-\frac{e}{c}\,\Delta^i_{nk}q^n\mathrm{v}^k = \\ = -\frac{e}{2c}\,h^{im}\mathrm{v}_k\frac{{}^*\partial q^k}{\partial x^m}-\frac{e}{2c}\,\mathrm{v}^k\frac{{}^*\partial q^i}{\partial x^k}-\frac{e}{2c}\,h^{im}q^n\mathrm{v}^k\frac{{}^*\partial h_{km}}{\partial x^n}\,.\end{gathered} \tag{3.156}$$

С учетом всех этих преобразований величина M^i (правая часть пространственных компонент хронометрически инвариантных уравнений движения массовой заряженной частицы) принимает окончательный вид

$$\begin{gathered}\frac{d\left(m\mathrm{v}^i\right)}{d\tau}-mF^i+2m\left(D^i_k+A^{\cdot i}_{k\cdot}\right)\mathrm{v}^k+m\Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k = \\ = -e\left(E^i+\frac{1}{2c}\,\varepsilon^{ikm}\mathrm{v}_k H_{*m}\right)+ \\ +\frac{e}{c}\left(q^k-\frac{\varphi}{c}\,\mathrm{v}^k\right)D^i_k+eh^{ik}\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^k}+\frac{e}{c}\,A^{ik}q_k- \\ -\frac{e}{2c}\,h^{im}\mathrm{v}_k\frac{{}^*\partial q^k}{\partial x^m}-\frac{e}{2c}\,\mathrm{v}^k\frac{{}^*\partial q^i}{\partial x^k}-\frac{e}{2c}\,h^{im}q^n\mathrm{v}^k\frac{{}^*\partial h_{km}}{\partial x^n}\,,\end{gathered} \tag{3.157a}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d\left(m\mathrm{v}^i\right)}{d\tau}+mF^i+m\Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k=\\
&=-e\left(E^i+\frac{1}{2c}\,\varepsilon^{ikm}\mathrm{v}_kH_{*m}\right)+\\
&+\frac{e}{c}\left(q^k-\frac{\varphi}{c}\,\mathrm{v}^k\right)D^i_k+eh^{ik}\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^k}+\frac{e}{c}\,A^{ik}q_k-\\
&-\frac{e}{2c}\,h^{im}\mathrm{v}_k\frac{{}^*\partial q^k}{\partial x^m}-\frac{e}{2c}\,\mathrm{v}^k\frac{{}^*\partial q^i}{\partial x^k}-\frac{e}{2c}\,h^{im}q^n\mathrm{v}^k\frac{{}^*\partial h_{km}}{\partial x^n}\,.
\end{aligned} \tag{3.157b}$$

Отсюда видно, что первый член $-e\left(E^i+\frac{1}{2c}\,\varepsilon^{ikm}\mathrm{v}_kH_{*m}\right)$ в правой части отличается от хронометрически инвариантной силы Лоренца $\Phi^i=-e\left(E^i+\frac{1}{c}\,\varepsilon^{ikm}\mathrm{v}_kH_{*m}\right)$ коэффициентом $\frac{1}{2}$ при магнитной составляющей этой силы. В §3.9 *Уравнения Минковского как частный случай полученных уравнений движения* мы покажем, при какой структуре электромагнитного потенциала A^α остальные члены M^i полностью компенсируют этот коэффициент $\frac{1}{2}$ и в правых частях хронометрически инвариантных пространственных уравнений движения заряженной частицы стоит только сила Лоренца.

§ 3.7 Уравнения движения заряженной частицы, следующие из принципа наименьшего действия, как частный случай полученных уравнений движения

В этом параграфе мы получим хронометрически инвариантное представление уравнений движения массовой заряженной частицы, выведенных из принципа наименьшего действия. Этот принцип состоит в том, что действие S по перемещению частицы вдоль траекторий кратчайшей длины является минимальным, т.е. вариация действия равна нулю

$$\delta\int_a^b dS=0\,. \tag{3.158}$$

Таким образом, уравнения движения, получаемые из принципа наименьшего действия, являются уравнениями линий наименьшей длины. Элементарное действие гравитационного и электромагнитного полей по перемещению заряженной массовой частицы имеет вид [10]

$$dS=-m_0c\,ds-\frac{e}{c}\,A_\alpha dx^\alpha, \tag{3.159}$$

где ds элементарный пространственно-временной интервал. Отсюда видно, что эта величина применима для описания частиц, движущихся только вдоль неизотропных траекторий ($ds\neq0$). Вместе

с тем, вывод уравнений движения методом параллельного переноса (линии неизменного направления) применим как к неизотропным так и к изотропным траекториям, вдоль которых $ds=0$. Более того, параллельный перенос применим также и для неримановых геометрий, в частности, для вывода уравнения движения частиц в полностью вырожденном пространстве-времени (нуль-пространстве). Поэтому уравнения линий наименьшей длины, получаемые методом наименьшего действия, представляют собой лишь частный случай линий неизменного направления, получаемых в результате параллельного переноса. Однако вернемся к принципу наименьшего действия (3.158). Это условие для массовой заряженой частицы принимает вид

$$\delta\int_a^b dS = -\,\delta\int_a^b m_0 c\, ds - \delta\int_a^b \frac{e}{c}\, A_\alpha dx^\alpha = 0\,, \tag{3.160}$$

где первый член можно записать в виде

$$\begin{aligned} -\,\delta\int_a^b m_0 c\, ds &= -\int_a^b m_0 c\,\mathrm{D}U_\alpha \delta x^\alpha = \\ &= \int_a^b m_0 c\,(dU_\alpha ds - \Gamma_{\alpha,\mu\nu} U^\mu dx^\nu)\,\delta x^\alpha. \end{aligned} \tag{3.161}$$

Вариацию второго интеграла из (3.160) представим следующим образом

$$-\frac{e}{c}\,\delta\int_a^b A_\alpha dx^\alpha = -\frac{e}{c}\left(\int_a^b \delta A_\alpha dx^\alpha + \int_a^b A_\alpha\, d\delta x^\alpha\right). \tag{3.162}$$

Проинтегрируем второй член по частям

$$\int_a^b A_\alpha\, d\delta x^\alpha = A_\alpha\,\delta x^\alpha\Big|_a^b - \int_a^b dA_\alpha \delta x^\alpha. \tag{3.163}$$

Здесь первый член равен нулю, т.к. интеграл варьируется при заданных значениях координат пределов интегрирования. Учитывая, что вариация ковариантного вектора равна

$$\delta A_\alpha = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}\,\delta x^\beta, \qquad dA_\alpha = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}\,dx^\beta, \tag{3.164}$$

получаем вариацию электромагнитной части действия

$$-\,\frac{e}{c}\,\delta\int_a^b A_\alpha dx^\alpha = -\,\frac{e}{c}\int_a^b \left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}\,dx^\alpha \delta x^\beta - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}\,\delta x^\alpha dx^\beta\right). \tag{3.165}$$

Поменяв местами свободные индексы α и β в первом члене этого выражения и учитывая вариацию гравитационной части действия (3.161), получаем вариацию суммарного действия (3.160) в виде

$$\delta\int_a^b dS = \int_a^b \Big[m_0 c\,(dU_\alpha - \Gamma_{\alpha,\mu\nu}U^\mu dx^\nu) - \frac{e}{c}\,F_{\alpha\beta}\,dx^\beta \Big]\,\delta x^\alpha, \quad (3.166)$$

где $F_{\alpha\beta} = \frac{A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}$ тензор Максвелла и $U^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$ четырехмерная скорость частицы. Из-за произвольности величины δx^α подынтегральное выражение всегда равно нулю, и, таким образом, мы получаем общековариантные уравнения движения массовой заряженной частицы

$$m_0 c\left(\frac{dU_\alpha}{ds} - \Gamma_{\alpha,\mu\nu}U^\mu U^\nu\right) = \frac{e}{c}\,F_{\alpha\beta}U^\beta, \quad (3.167)$$

или, подняв индекс α, в более привычном виде

$$m_0 c\left(\frac{dU^\alpha}{ds} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}U^\mu U^\nu\right) = \frac{e}{c}\,F^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta}\,U^\beta. \quad (3.168)$$

Таким образом, полученные уравнения представляют собой уравнения Минковского в псевдоримановом пространстве. В галилеевой системе отсчета плоского пространства Минковского они преобразуются в обычные релятивистские уравнения (3.93).

Теперь выведем хронометрически инвариантные уравнения Минковского в псевдоримановом пространстве. Проецируя общековариантные уравнения (3.168) на время и на пространство в сопутствующей системе отсчета, получаем для заряженной массовой частицы нашего мира

$$\frac{dE}{d\tau} - mF_i\mathrm{v}^i + mD_{ik}\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k = -\,eE_i\mathrm{v}^i, \quad (3.169)$$

$$\frac{d\left(m\mathrm{v}^i\right)}{d\tau} - mF^i + 2m\left(D^i_k + A^{\cdot i}_{k\cdot}\right)\mathrm{v}^k + m\Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k = -\,e\left(E^i + \frac{1}{c}\,\varepsilon^{ikm}\mathrm{v}_k H_{*m}\right), \quad (3.170)$$

и для заряженной массовой частицы зазеркалья

$$-\frac{dE}{d\tau} - mF_i\mathrm{v}^i + mD_{ik}\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k = -\,eE_i\mathrm{v}^i, \quad (3.171)$$

$$\frac{d\left(m\mathrm{v}^i\right)}{d\tau} + mF^i + m\Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k = -\,e\left(E^i + \frac{1}{c}\,\varepsilon^{ikm}\mathrm{v}_k H_{*m}\right). \quad (3.172)$$

Скалярные уравнения движения, как в нашем мире, так и в зазеркалье, представляют собой теорему живых сил. А векторные уравнения движения — трехмерные уравнения Минковского, в правой части которых стоит хронометрически инвариантная сила Лоренца (вычисленная в псевдоримановом пространстве). Как нетрудно убедиться, в галилеевой системе отсчета пространства Минковского эти уравнения принимают вид теоремы живых сил (3.92) и обычных уравнений движения заряженной частицы (3.90) классической электродинамики. Очевидно, что правые части этих уравнений (3.169–3.172), полученных методом наименьшего действия, отличаются от правых частей уравнений движения (3.146, 3.157), выведенных методом параллельного переноса. Отличие состоит в отсутствии здесь (3.169–3.172) некоторых членов, характеризующих структуру электромагнитного поля и самого пространства. Впрочем, как мы уже упоминали, линии наименьшей длины (наименьшего действия), являются лишь частным случаем линий неизменного направления, определяемых параллельным переносом. Поэтому неудивительно, что в уравнениях параллельного переноса, как более общих, имеются дополнительные члены, учитывающие структуру пространства и электромагнитного поля.

§3.8 Геометрическая структура четырехмерного потенциала электромагнитного поля

В этом параграфе мы проведем поиск такой структуры четырехмерного потенциала электромагнитного поля A^{α}, при которой длина суммарного вектора $Q^{\alpha} = P^{\alpha} + \frac{e}{c^2} A^{\alpha}$ сохраняется при параллельном переносе. Известно, что при параллельном переносе в смысле Леви-Чивита длина переносимого вектора Q^{α} сохраняется, т.е. выполняется условие $Q_{\alpha}Q^{\alpha} = const$. Так как квадрат длины вектора в псевдоримановом пространстве является инвариантом, это условие должно выполняться в любой системе отсчета, в том числе для наблюдателя, сопутствующего своему телу отсчета. Поэтому мы вполне можем провести анализ этого условия, записав его через физические наблюдаемые величины в сопутствующей системе отсчета (в хронометрически инвариантном виде). Компоненты суммарного вектора Q^{α} в сопутствующей системе отсчета имеют вид

$$Q_0 = \left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\left(\pm m + \frac{e\varphi}{c^2}\right), \tag{3.173}$$

$$Q^0 = \frac{1}{1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}}\left[\left(\pm m + \frac{e\varphi}{c^2}\right) + \frac{1}{c^2}\, v_i \left(m\mathrm{v}^i + \frac{e}{c}\, q^i\right)\right], \tag{3.174}$$

$$Q_i = -\frac{1}{c}\left(m\mathrm{v}_i + \frac{e}{c}\,q_i\right) - \frac{1}{c}\left(\pm m + \frac{e\varphi}{c^2}\right)v_i\,, \qquad (3.175)$$

$$Q^i = \frac{1}{c}\left(m\mathrm{v}^i + \frac{e}{c}\,q^i\right), \qquad (3.176)$$

и его квадрат

$$Q_\alpha Q^\alpha = m_0^2 + \frac{e^2}{c^4}\left(\varphi^2 - q_i q^i\right) + \frac{2me}{c^2}\left(\pm\varphi - \frac{1}{c}\,\mathrm{v}_i\, q^i\right). \qquad (3.177)$$

Из этого выражения видно, что квадрат длины суммарного вектора массовой заряженной частицы складывается из:

- квадрата длины собственного четырехмерного импульса частицы $P_\alpha P^\alpha = m_0^2$;
- квадрата длины четырехмерного импульса $\frac{e}{c^2}A^\alpha$, сообщаемого заряженной частице электромагнитным полем, $\frac{e^2}{c^4}\left(\varphi^2 - q_i q^i\right)$;
- члена $\frac{2me}{c^2}(\pm\varphi - \frac{1}{c}\,\mathrm{v}_i\, q^i)$, характеризующего взаимодействие гравитационного “заряда” частицы m и ее электрического заряда e.

В выражении для квадрата вектора $Q_\alpha Q^\alpha$ (3.177) сохраняется в любом случае, т.е. является инвариантом, не зависящим от выбора системы отсчета, первый член m_0^2. Наша задача состоит в том, чтобы вычислить условия, при которых сохраняется все выражение для квадрата вектора (3.177).

Положим, что векторный потенциал частицы в электромагнитном поле имеет структуру

$$q^i = \frac{\varphi}{c}\,\mathrm{v}^i. \qquad (3.178)$$

В этом случае* второй член (3.177), являющийся квадратом вектора $\frac{e}{c^2}A^\alpha$, равен

$$\frac{e^2}{c^4}\,A_\alpha A^\alpha = \frac{e^2\varphi^2}{c^4}\left(1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right). \qquad (3.179)$$

Аналогичным образом, преобразовывая третий член, получаем выражение для квадрата вектора Q^α (3.177) в виде

$$Q_\alpha Q^\alpha = m_0^2 + \frac{e^2\varphi^2}{c^4}\left(1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right) + \frac{2m_0\, e}{c^2}\,\varphi\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}\,. \qquad (3.180)$$

---

*Аналогичную задачу можно было бы решить, предположив, что $q^i = \pm\frac{\varphi}{c}\,\mathrm{v}^i$. Однако при сравнительном анализе двух групп уравнений движения интерес будут представлять только положительные значения $q^i = \frac{\varphi}{c}\,\mathrm{v}^i$, т.к. физическое время наблюдателя τ, по определению, течет только из прошлого в будущее (эталонное время) и интервал наблюдаемого времени $d\tau$ всегда больше нуля.

Тогда, введя обозначение для скалярного потенциала частицы в электромагнитного поля

$$\varphi = \frac{\varphi_0}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\,, \tag{3.181}$$

мы можем записать полученное выражение (3.180) как

$$Q_\alpha Q^\alpha = m_0^2 + \frac{e^2\varphi_0^2}{c^4} + \frac{2m_0 e\varphi_0}{c^2} = const. \tag{3.182}$$

Отсюда видно, что длина суммарного вектора Q^α заряженной массовой частицы сохраняется при параллельном переносе (является инвариантом, не зависящим от выбора системы отсчета), если ее наблюдаемые потенциалы φ и q^i в поле связаны с четырехмерным потенциалом поля A^α соотношениями

$$\frac{A_0}{\sqrt{g_{00}}} = \varphi = \frac{\varphi_0}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\,, \qquad A^i = q^i = \frac{\varphi}{c}\,\mathrm{v}^i. \tag{3.183}$$

Тогда для четырехмерного вектора $\frac{e}{c^2}A^\alpha$, характеризующего взаимодействие заряженной частицы с электромагнитным полем, мы имеем

$$\frac{e}{c^2}\frac{A_0}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{e\varphi_0}{c^2\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\,, \qquad \frac{e}{c^2}A^i = \frac{e\varphi_0}{c^3}\frac{\mathrm{v}^i}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\,. \tag{3.184}$$

Заметим, размерности векторов $\frac{e}{c^2}A^\alpha$ и $P^\alpha = m_0\frac{dx^\alpha}{ds}$ в системе единиц СГСЭ и гауссовой совпадают и равны размерности массы m [грамм].

Сравнивая физические наблюдаемые компоненты обоих векторов, нетрудно заметить, что аналогом релятивистской массы m во взаимодействии частицы с электромагнитным полем выступает величина

$$\frac{e\varphi}{c^2} = \frac{e\varphi_0}{c^2\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\,, \tag{3.185}$$

где $e\varphi$ потенциальная энергия заряженной частицы, движущейся с наблюдаемой скоростью $\mathrm{v}^i = \frac{dx^i}{d\tau}$ в электромагнитном поле (которое покоится относительно наблюдателя и его тела отсчета).

Вообще говоря, скалярный потенциал φ является релятивистской потенциальной энергией частицы с зарядом e, а $e\varphi$ — ее потенциальной энергией покоя. Когда частица покоится относительно поля, ее потенциальная энергия покоя совпадает с релятивистской потенциальной энергией. Сопоставляя величины $E = mc^2$ и $W = e\varphi$,

можно сказать, что $\frac{W_0}{c^2}$ есть электромагнитный аналог релятивистской массы m. Соответственно, $W_0 c^2 = \frac{e\varphi_0}{c^2}$ представляет собой электромагнитный аналог массы покоя m_0. Тогда векторная наблюдаемая величина $\frac{e}{c^2}A^i = \frac{e\varphi}{c^2}\mathrm{v}^i$ аналогична наблюдаемому вектору импульса массовой частицы, отнесенному к скорости света, $p^i = m\mathrm{v}^i$. Таким образом, когда частица покоится относительно поля, ее "электромагнитная" проекция на пространство (векторная величина) равна нулю и наблюдается лишь ее временная проекция (потенциальная энергия покоя $e\varphi_0 = const$). Если же частица движется в поле со скоростью v^i, то ее наблюдаемыми "электромагнитными" проекциями являются релятивистская потенциальная энергия $e\varphi$ и релятивистский трехмерный импульс $\frac{e\varphi}{c^2}\mathrm{v}^i$.

Зная хронометрически инвариантные компоненты вектора $\frac{e}{c^2}A^\alpha$ (3.184), вычисленные для заданной структуры компонент вектора A^α (3.183), можно восстановить его в общековариантном виде, выразив через скалярный потенциал покоящейся заряженной частицы в электромагнитном поле. Учитывая, что компонента A^i равна

$$A^i = q^i = \frac{\varphi}{c}\,\mathrm{v}^i = \frac{\varphi}{c\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\frac{dx^i}{d\tau} = \varphi_0\,\frac{dx^i}{ds}\,, \tag{3.186}$$

получаем искомую общековариантную форму A^α

$$A^\alpha = \varphi_0\,\frac{dx^\alpha}{ds}\,, \qquad \frac{e}{c^2}A^\alpha = \frac{e\varphi_0}{c^2}\frac{dx^\alpha}{ds}\,. \tag{3.187}$$

Вместе с тем, проецируя полученное выражение A^α (3.187) на время и на пространство

$$\frac{A_0}{\sqrt{g_{00}}} = \pm\,\varphi = \pm\,\frac{\varphi_0}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\,, \qquad A^i = q^i = \frac{\varphi}{c}\,\mathrm{v}^i, \tag{3.188}$$

мы получаем знакопеременность во временной проекции, отсутствующую в исходной временной проекции этой величины (3.183).

Естественно возникает вопрос: почему временная наблюдаемая компонента вектора A^α,определенная вначале как φ, при заданной структуре вектора A^α (3.187) приобрела знакопеременность? Здесь дело в том, что в первом случае наблюдаемые величины φ q^i *определяются* исходя из общего правила образования хронометрически инвариантных величин. Однако, не зная структуры самого проецируемого вектора A^α, мы не можем их вычислить. Поэтому в выражениях для временной и пространственной проекций (3.183) символы φ и q^i лишь *обозначают* наблюдаемые компоненты, не раскрывая

при этом их “внутренней” структуры. Вместе с тем, в выражениях (3.188) величины φ и q^i являются *вычисленными* по формулам $\varphi = \sqrt{g_{00}}\,A^0 + \frac{g_{0i}}{\sqrt{g_{00}}}\,A^i$ и $q^i = A^i$, где структура компонент A^0 и A^i является заданной. Поэтому во втором случае величина $\pm\varphi$ есть результат вычисления, из которого непосредственно следует ее конкретное выражение

$$\varphi = \pm\frac{\varphi_0}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\,. \tag{3.189}$$

Таким образом *вычисленные* значения хронометрически инвариантных компонент вектора $\frac{e}{c^2}A^\alpha$ имеют вид

$$\frac{e}{c^2}\frac{A_0}{\sqrt{g_{00}}} = \pm\frac{e\varphi}{c^2} = \pm\frac{e\varphi_0}{c^2\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\,, \qquad \frac{e}{c^2}\,A^i = \frac{e\varphi}{c^3}\,\mathrm{v}^i, \tag{3.190}$$

где знак “плюс” имеет место для частиц нашего мира, движущихся из прошлого в будущее (мир с прямым ходом времени), и знак “минус” — для частиц зазеркалья, движущихся относительно нас в прошлое — мир с обратным ходом времени. Квадрат длины этого вектора

$$\frac{e^2}{c^4}\,A_\alpha A^\alpha = \frac{e^2\varphi^2}{c^4}\left(1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right) = \frac{e^2\varphi_0^2}{c^4} = const \tag{3.191}$$

вдоль всей траектории движения частицы (линии параллельного переноса). Сам вектор $\frac{e}{c^2}\,A^\alpha$, имеет вещественную длину при $\mathrm{v}^2 < c^2$, нулевую длину при $\mathrm{v}^2 = c^2$ и мнимую при $\mathrm{v}^2 > c^2$. Здесь мы ограничились исследованием лишь вещественной формы этого вектора, т.к. светоподобные и сверхсветовые частицы нам неизвестны. Если сравнить выражения для векторов $P^\alpha = m_0\frac{dx^\alpha}{ds}$ и $\frac{e}{c^2}\,A^\alpha = \frac{e\varphi_0}{c^2}\frac{dx^\alpha}{ds}$, становится очевидно, что оба эти вектора коллинеарны, т.к. являются касательными к одной и той же неизотропной траектории, вдоль которой выбран параметр дифференцирования s. Следовательно, в данном случае направление динамического вектора частицы P^α совпадает с направлением действия на нее электромагнитного поля (частица движется “вдоль” поля).

Исследуем общий случай, когда эти векторы не совпадают по направлению. Из квадрата суммарного вектора $Q_\alpha Q^\alpha$ (3.177) видно, что третий член есть удвоенное скалярное произведение векторов P^α и $\frac{e}{c^2}\,A^\alpha$. При параллельном переносе двух векторов их скалярное произведение сохраняется

$$\mathrm{D}\,(P_\alpha A^\alpha) = A^\alpha\,\mathrm{D}P_\alpha + P_\alpha\mathrm{D}A^\alpha = 0\,, \tag{3.192}$$

т.к. абсолютное приращение каждого вектора равно нулю. Таким образом, получаем

$$\frac{2e}{c^2}\,P_\alpha A^\alpha = \frac{2me}{c^2}\left(\pm\varphi - \frac{1}{c}\,\mathrm{v}_i\,q^i\right) = const, \tag{3.193}$$

т.е. скалярное произведение $\frac{e}{c^2}P_\alpha A^\alpha$ сохраняется. Следовательно, сохраняется и длина каждого из переносимых векторов, в частности мы имеем

$$A_\alpha A^\alpha = \varphi^2 - q_i q^i = const. \tag{3.194}$$

В то же время скалярное произведение двух векторов есть произведение их длин на косинус угла между ними. Поэтому при параллельном переносе угол между переносимыми векторами также сохраняется

$$\cos\left(P^\alpha; A^\alpha\right) = \frac{P_\alpha A^\alpha}{m_0\sqrt{\varphi^2 - q_i q^i}} = const. \tag{3.195}$$

Учитывая выражение для релятивистской массы m, мы можем записать условие (3.193) в виде

$$\frac{2e}{c^2}\,P_\alpha A^\alpha = \pm\frac{2m_0 e}{c^2}\frac{\varphi}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}} - \frac{2m_0 e}{c^2}\frac{\mathrm{v}_i\,q^i}{c\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}} = const, \tag{3.196}$$

или, иначе, в виде связи скалярного и вектор-потенциала

$$\pm\frac{\varphi}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}} - \frac{\mathrm{v}_i\,q^i}{c\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}} = const. \tag{3.197}$$

Например, найдем связь между потенциалами φ и q^i частицы в поле, когда четырехмерный вектор частицы P^α ортогонален четырехмерному импульсу $\frac{e}{c^2}A^\alpha$, получаемому частицей от поля. Так как при параллельном переносе двух векторов угол между ними сохраняется, то, согласно общей формуле (3.195), косинус угла между данными ортогональными векторами равен нулю вдоль всей траектории

$$P_\alpha A^\alpha = \pm\,\varphi - \frac{1}{c}\,\mathrm{v}_i\,q^i = 0\,. \tag{3.198}$$

Следовательно, если частица движется в электромагнитном поле таким образом, что векторы P^α и A^α ортогональны, то скалярный потенциал поля равен

$$\varphi = \pm\,\frac{1}{c}\,\mathrm{v}_i\,q^i, \tag{3.199}$$

т.е. представляет собой скалярное произведение трехмерных хронометрически инвариантных векторов: наблюдаемой скорости частицы v^i и вектор-потенциала q^i частицы в поле.

Теперь найдем выражение для квадрата суммарного вектора Q^α с учетом геометрической структуры четырехмерного электромагнитного потенциала $A^\alpha = \varphi_0 \frac{dx^\alpha}{ds}$ (3.187). Если четырехмерный вектор поля A^α сонаправлен с вектором импульса частицы P^α, то квадрат $Q_\alpha Q^\alpha$ принимает вид

$$Q_\alpha Q^\alpha = m^2 - \frac{m^2}{c^2}\,\mathrm{v}_i\mathrm{v}^i + \frac{e^2}{c^4}\left(\varphi^2 - q_i q^i\right) = m_0^2 + \frac{e^2}{c^4}\,\varphi_0^2\,. \qquad (3.200)$$

Умножая обе части равенства на c^4 и обозначая релятивистскую энергию частицы $E = mc^2$, получаем

$$E^2 - c^2p^2 + e^2\varphi^2 - e^2 q_i q^i = E_0^2 + e^2\varphi_0^2\,. \qquad (3.201)$$

где $p^2 = p_i p^i$, $p^i = m\mathrm{v}^i$ трехмерный хронометрически инвариантный импульс частицы, $e\varphi$ потенциальная энергия заряженной частицы в электромагнитном поле, eq_i трехмерный импульс, приобретаемый заряженной частицей в электромагнитном поле.

§ 3.9 Уравнения Минковского как частный случай полученных уравнений движения

Итак, в §3.6 мы получили хронометрически инвариантные (наблюдаемые) проекции общековариантных уравнений движения массовой заряженной частицы в псевдоримановом пространстве. При этом исходные общековариантные уравнения движения были выведены методом параллельного переноса суммарного вектора частицы. Там же было показано, что временная наблюдаемая проекция (3.147) этих уравнений движения в галилеевой системе отсчета принимает вид временной компоненты уравнений Минковского (3.98). Соответственно, в трехмерном евклидовом пространстве наше хронометрически инвариантное скалярное уравнение (3.147) превращается в теорему живых сил классической электродинамики (3.92). Однако в правых частях (3.157) пространственных наблюдаемых проекций вместо хронометрически инвариантной силы Лоренца $-e\big(E^i + \frac{1}{2c}\,\varepsilon^{ikm}\mathrm{v}_k H_{*m}\big)$, стоит другое, отличающееся выражение $\Phi^i = -e\big(E^i + \frac{1}{c}\,\varepsilon^{ikm}\mathrm{v}_k H_{*m}\big)$, и еще несколько дополнительных членов, являющихся функциями наблюдаемых характеристик электромагнитного поля и самого пространства. Поэтому для трехмерных наблюдаемых проекций уравнений движения в псевдоримановом

пространстве, полученных методом параллельного переноса, принцип соответствия с трехмерными компонентами уравнений Минковского устанавливается нетривиально. Вместе с тем, уравнения линий неизменного направления, получающиеся в результате параллельного переноса в псевдоримановом пространстве, являются более общим случаем линий наименьшей длины, получаемых методом наименьшего действия. Причем уравнения движения, выведенные из принципа наименьшего действия (в §3.7), по своей структуре полностью совпадают с уравнениями Минковского. Поэтому следует ожидать, что и временная и пространственная проекции наших уравнений движения заряженной частицы, как более общие, в каком-то частном случае преобразуются в пространственные проекции уравнений движения, полученных из принципа наименьшего действия.

Чтобы выяснить конкретно, при каких условиях это происходит, рассмотрим правые части пространственных проекций уравнений движения, в которых наблюдалось расхождение с силой Лоренца. Эти правые части мы (для удобства анализа) взяли в виде отдельных выражений и обозначили M^i (3.157). Используя хронометрически инвариантную компоненту H^{ik} (3.12) тензора Максвелла запишем член $\frac{e\varphi}{c^2}A^{ik}\mathrm{v}_k$ исследуемого выражения (3.157) в виде

$$\frac{e\varphi}{c^2}A^{ik}\mathrm{v}_k=\frac{e}{2c}\,h^{im}\mathrm{v}^n\left(\frac{{}^*\partial q_m}{\partial x^n}-\frac{{}^*\partial q_n}{\partial x^m}\right)-\frac{e}{2c}\,\varepsilon^{ikm}H_{*m}\mathrm{v}_k\,, \qquad (3.202)$$

где $\varepsilon^{ikm}H_{*m}=H^{ik}$. Подставим в (3.157) наблюдаемые компоненты потенциала электромагнитного поля A^{α} в виде (3.188), при котором вектор импульса $\frac{e}{c^2}A^{\alpha}$, сообщаемого заряженной частице электромагнитным полем касателен к траектории. Используя первое выражение $q_m=\frac{\varphi}{c}\mathrm{v}_m$, получаем зависимость исследуемой правой части только от скалярного потенциала электромагнитного поля

$$\begin{aligned}M^i=&-e\left(E^i+\frac{1}{c}\,\varepsilon^{ikm}\mathrm{v}_kH_{*m}\right)+\\&+eh^{ik}\left(1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^k}+\frac{e\varphi}{2}\,h^{ik}\frac{{}^*\partial}{\partial x^k}\left(1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right).\end{aligned} \qquad (3.203)$$

Подставляя сюда φ (3.181), мы видим, что сумма двух последних членов становится равной нулю

$$-\frac{e\varphi}{2}\,h^{ik}\frac{{}^*\partial}{\partial x^k}\left(1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)+\frac{e\varphi}{2}\,h^{ik}\frac{{}^*\partial}{\partial x^k}\left(1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)=0\,. \qquad (3.204)$$

Тогда M^i принимает вид хронометрически инвариантной силы Лоренца в псевдоримановом пространстве

$$M^i = -\,e\left(E^i + \frac{1}{c}\,\varepsilon^{ikm}\mathrm{v}_k H_{*m}\right), \tag{3.205}$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, пространственные проекции уравнений движения заряженной массовой частицы, выведенных методом параллельного переноса в псевдоримановом пространстве, совпадают с пространственными проекциями уравнений движения, полученных из принципа наименьшего действия, в частном случае, когда четырехмерный электромагнитный потенциал имеет структуру (3.187). Соответственно, при такой структуре электромагнитного потенциала в галилеевой системе отсчета плоского пространства-времени наши хронометрически инвариантные уравнения движения полностью совпадают с уравнениями Минковского и в трехмерном евклидовом пространстве принимают вид уравнений движения классической электродинамики. Рассмотрим теперь правую часть c^2T скалярного уравнения (3.147) при условии, что вектор A^αимеет указанную структуру и направлен по касательной к траектории движения частицы. Подставляя в (3.146) наблюдаемые компоненты φ и q^i, вычисленные для вектора A^α данной структуры, преобразуем величину T к виду

$$\begin{aligned} c^2T &= -\,eE_i\mathrm{v}^i - e\,\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial t} + \frac{e}{c^2}\left[\frac{{}^*\partial}{\partial t}\left(\varphi h_{ik}\mathrm{v}^k\right) - \varphi D_{ik}q^k\right]\mathrm{v}^i = \\ &= -\,eE_i\mathrm{v}^i - e\,\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial t}\left(1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right) + \frac{e\varphi}{c^2}\,D_{ik}\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k + \frac{e\varphi}{c^2}\,\mathrm{v}_k\frac{{}^*\partial\mathrm{v}^k}{\partial t}. \end{aligned} \tag{3.206}$$

Подставляя в первую производную φ (3.181), и, после дифференцирования, вновь возвращаясь к φ, получаем

$$\begin{aligned} c^2T &= -\,eE_i\mathrm{v}^i - \frac{e\varphi}{2c^2}\frac{{}^*\partial}{\partial t}\left(h_{ik}\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k\right) + \frac{e\varphi}{c^2}\,D_{ik}\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k + \\ &+ \frac{e\varphi}{c^2}\,\mathrm{v}_k\frac{{}^*\partial\mathrm{v}^k}{\partial t} = -\,eE_i\mathrm{v}^i - \frac{e\varphi}{2c^2}\left(\frac{{}^*\partial h_{ik}}{\partial t}\,\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k + 2\mathrm{v}_k\frac{{}^*\partial\mathrm{v}^k}{\partial t}\right) + \\ &+ \frac{e\varphi}{c^2}\,D_{ik}\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k + \frac{e\varphi}{c^2}\,\mathrm{v}_k\frac{{}^*\partial\mathrm{v}^k}{\partial t} = -\,eE_i\mathrm{v}^i, \end{aligned} \tag{3.207}$$

т.к. по определению тензора деформации D_{ik} (1.40), $\frac{{}^*\partial h_{ik}}{\partial t} = 2D_{ik}$.

Таким образом правая часть скалярного хронометрически инвариантного уравнения движения заряженной частицы полностью

совпадает с временной проекцией четырехмерных уравнений Минковского в псевдоримановом пространстве. Следовательно, если четырехмерный вектор-потенциал электромагнитного поля направлен по касательной к четырехмерной траектории (мировой линии) заряженной частицы, то уравнения движения, выведенные методом параллельного переноса, полностью совпадают с уравнениями движения, полученными из принципа наименьшего действия. Впрочем, это еще раз иллюстрирует тот геометрический факт, что линии наименьшей длины, получаемые из принципа наименьшего действия, являются лишь частным случаем линий неизменного направления, являющихся результатом параллельного переноса.

§ 3.10 Структура псевдориманова пространства со стационарным электромагнитным полем

Очевидно, что задание определенной структуры электромагнитного поля накладывает определенные ограничения на движение заряженных частиц, что, в свою очередь, накладывает ограничения на структуру псевдориманова пространства, в котором это движение происходит. Мы исследуем, какова должна быть структура псевдориманова пространства, чтобы частица двигалась в стационарном электромагнитном поле.

Хронометрически инвариантные уравнения движения заряженной массовой частицы нашего мира имеют вид

$$\frac{dE}{d\tau} - mF_i \mathrm{v}^i + mD_{ik}\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k = -e\,\frac{d\varphi}{d\tau} + \frac{e}{c}\left(F_i\, q^i - D_{ik}q^i\mathrm{v}^k\right), \qquad (3.208)$$

$$\begin{gathered}\frac{d\left(m\mathrm{v}^i\right)}{d\tau} - mF^i + 2m\left(D^i_k + A^{\cdot i}_{k\cdot}\right)\mathrm{v}^k + m\Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k = \\ = -\frac{e}{c}\,\frac{dq^i}{d\tau} - \frac{e}{c}\left(\frac{\varphi}{c}\,\mathrm{v}^k + q^k\right)\left(D^i_k + A^{\cdot i}_{k\cdot}\right) + \frac{e\varphi}{c^2}\,F^i - \frac{e}{c}\,\Delta^i_{nk}q^n\mathrm{v}^k.\end{gathered} \qquad (3.209)$$

Так как мы считаем электромагнитное поле стационарным, потенциалы поля φ и q^i являются функциям лишь пространственных координат, но не времени. Наблюдаемые компоненты тензора электромагнитного поля (тензора Максвелла) для стационарного поля имеют вид

$$E_i = \frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^i} - \frac{\varphi}{c^2}\,F_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i} - \varphi\,\frac{\partial}{\partial x^i}\ln\!\left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right), \qquad (3.210)$$

$$H^{*i} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{imn}H_{mn} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{imn}\left(\frac{\partial q_m}{\partial x^n} - \frac{\partial q_n}{\partial x^m} - \frac{2\varphi}{c}\,A_{mn}\right). \qquad (3.211)$$

Отсюда можно получить ограничения на метрику псевдориманова пространства, налагаемые требованием стационарности электромагнитного поля. В выражении для E_i и H^{*i}, наряду с хронометрически инвариантными производными от скалярного и векторного потенциалов поля, входят также хронометрически инвариантные характеристики пространства отсчета — вектор гравитационно-инерциальной силы F_i и тензор неголономности (вращения) пространства A_{ik}. Очевидно, в стационарном электромагнитном поле отсчета физические наблюдаемые характеристики пространства также должны быть стационарными

$$\frac{^*\partial F_i}{\partial t} = 0\,, \quad \frac{^*\partial F^i}{\partial t} = 0\,, \quad \frac{^*\partial A_{ik}}{\partial t} = 0\,, \quad \frac{^*\partial A^{ik}}{\partial t} = 0\,. \qquad (3.212)$$

Из этих определений видно: величины F_i и A_{ik} не зависят от времени, если линейная скорость вращения пространства стационарна, т.е. $\frac{\partial v_i}{\partial t} = 0$. При стационарном вращении пространства ($\frac{\partial v_i}{\partial t} = 0$) хронометрически инвариантная производная по пространственным координатам превращается в обычную производную

$$\frac{^*\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{1}{c^2}\frac{^*\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x^i}\,. \qquad (3.213)$$

Здесь надо отметить: т.к. хронометрически инвариантная производная по времени $\frac{\partial}{\partial t} = \left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\frac{^*\partial}{\partial t}$, отличается от обычной производной лишь множителем, то для стационарной величины обычная производная также равна нулю. Для тензора скоростей деформации D_{ik} в случае стационарного вращения пространства имеем

$$\frac{^*\partial D_{ik}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{^*\partial h_{ik}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{^*\partial}{\partial t}\left(-\,g_{ik} + \frac{1}{c^2}\,v_i v_k\right) = -\frac{1}{2}\frac{^*\partial g_{ik}}{\partial t}\,. \qquad (3.214)$$

В силу стационарности правых частей уравнения движения левые части также должны быть стационарными. Это, в свою очередь, означает, что пространство не деформируется. Тогда, согласно (3.214), трехмерная координатная метрика g_{ik} не зависит от времени и хронометрически инвариантные символы Кристоффеля Δ^i_{jk} (1.47) также стационарны. Хронометрически инвариантные компоненты тензора Максвелла (3.210, 3.211) подчиняются уравнениям Максвелла (3.63, 3.64), которые для стационарного поля имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial E^i}{\partial x^i} + \frac{\partial \ln\sqrt{h}}{\partial x^i}\,E^i - \frac{2}{c}\,\Omega_{*m}H^{*m} = 4\pi\rho \\ &\varepsilon^{ikm}\,{}^*\widetilde{\nabla}_k\left(H_{*m}\sqrt{h}\right) = \frac{4\pi}{c}\,j^i\sqrt{h} \end{aligned}\right\}\ \mathrm{I}\,, \qquad (3.215)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial H^{*i}}{\partial x^i}+\frac{\partial \ln\sqrt{h}}{\partial x^i}\,H^{*i}+\frac{2}{c}\,\Omega_{*m}E^m=0\\ &\varepsilon^{ikm}\,{}^*\widetilde{\nabla}_k\big(E_m\sqrt{h}\big)=0 \end{aligned}\right\}\quad \text{II}\,. \tag{3.216}$$

Тогда условие Лоренца (3.65) и уравнение неразрывности (3.66), соответственно, имеют вид

$$^*\widetilde{\nabla}_i\, q^i=0\,,\qquad {}^*\widetilde{\nabla}_i\, j^i=0\,. \tag{3.217}$$

Итак, мы вычислили, как стационарность электромагнитного поля влияет на физические наблюдаемые характеристики псевдориманова пространства и на основные уравнения электродинамики. В следующих параграфах, пользуюсь этими результатами, мы получим решения уравнений движения для заряженной частицы в псевдоримановом пространстве (3.208, 3.209) для трех конкретных случаев стационарных полей: 1) в стационарном электрическом поле (магнитная составляющая поля равна нулю); 2) в стационарном магнитном поле (электрическая составляющая поля равна нулю); 3) в стационарном электрическом и магнитном полях.

§3.11 Движение заряженной частицы в стационарном электрическом поле

Рассмотрим движение заряженной массовой частицы в стационарном электрическом поле в псевдоримановом пространстве. Магнитное поле в данном случае отсутствует, т.е. не проявляется для наблюдателя. Каким условиям должно удовлетворять псевдориманово пространство, допускающее существование стационарного электромагнитного поля чисто “электрического” типа? Из выражения для магнитной напряженности стационарного поля

$$H_{ik}=\frac{\partial q_i}{\partial x^k}-\frac{\partial q_k}{\partial x^i}-\frac{2\varphi}{c}\,A_{ik} \tag{3.218}$$

следует, что $H_{ik}=0$, если выполняются два условия:

1) вектор-потенциал q^i является безвихревым $\frac{\partial q_i}{\partial x^k}=\frac{\partial q_k}{\partial x^i}$;
2) пространство является голономным, т.е. $A_{ik}=0$.

Напряженность стационарного электрического поля E_i (3.210) есть сумма пространственной производной от скалярного потенциала φ и члена $\frac{\varphi}{c^2}\,F_i$, характеризующего взаимодействие поля потенциала с полем гравитационно-инерциальной силы. Но на поверхности Земли отношение гравитационного потенциала к квадрату скорости

света

$$\frac{\mathrm{w}}{c^2} = \frac{GM_{\oplus}}{c^2 R_{\oplus}} \approx 10^{-10}, \tag{3.219}$$

поэтому второй член в выражении для E_i (3.210) можно считать в условиях реальной земной лаборатории пренебрежимо малым, и величина E_i определяется лишь пространственным распределением скалярного потенциала поля

$$E_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}\,. \tag{3.220}$$

Из-за стационарности правых частей уравнения движения, представляющих собой силу Лоренца, левые части также должны быть стационарными. При рассматриваемых нами условиях это выполняется, если тензор скоростей деформации равен нулю, т.е. пространство не деформируется.

Таким образом, если стационарное электромагнитное поле имеет такую структуру, что отлична от нуля лишь его электрическая составляющая, а магнитная составляющая отсутствует, то псевдориманово пространство должно удовлетворять трем следующим условиям:

1) гравитационный потенциал w пренебрежимо мал $\mathrm{w} \approx 0$;
2) пространство не вращается, т.е. $A_{ik} = 0$;
3) пространство не деформируется, т.е. $D_{ik} = 0$.

Кроме того, для простоты вычислений будем считать, что в условиях измерений трехмерное пространство по структуре приближается к евклидову пространству, т.е. $\Delta^i_{nk} \approx 0$.

Тогда хронометрически инвариантные уравнения движения массовой заряженной частицы нашего мира (3.208, 3.209) принимают следующий вид

$$\frac{dm}{d\tau} = -\frac{e}{c^2}\frac{d\varphi}{d\tau}\,, \tag{3.221}$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(m\mathrm{v}^i\right) = -\frac{e}{c}\frac{dq^i}{d\tau}\,. \tag{3.222}$$

Из скалярного уравнения движения (теоремы живых сил) видно: изменение релятивистской энергии частицы $E = mc^2$ обусловлено работой электрической составляющей поля E_i.

Из векторного уравнения движения следует, что изменение трехмерного наблюдаемого импульса частицы происходит под действием члена q^i. Полагая, что четырехмерный потенциал поля направлен по касательной к мировой линии частицы, мы, как было показано

в §3.9, получим в правой части векторного уравнения трехмерную силу Лоренца для электрического поля

$$\Phi^i = -\, eE^i. \tag{3.223}$$

То есть, в рассматриваемом нами случае изменение трехмерного импульса частицы происходит также из-за действия на нее напряженности электрического поля. Обе группы уравнений Максвелла для стационарного поля (3.215, 3.216) в этом случае приобретает простую форму

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial E^i}{\partial x^i} = 4\pi\rho \\ &j^i = 0 \end{aligned}\right\} \text{ I}, \tag{3.224a}$$

$$\left.\varepsilon^{ikm}\frac{\partial E_m}{\partial x^k} = 0 \ \right\} \text{ II}. \tag{3.224b}$$

Интегрируя скалярное уравнение движения, т.е. *теорему живых сил*, получаем так называемый *интеграл живых сил*

$$m + \frac{e\varphi}{c^2} = B = const, \tag{3.225}$$

где B постоянная интегрирования.

Кроме того, из уравнений Максвелла следует, что в данном случае скалярный потенциал поля удовлетворяет:

1) уравнению Пуассона $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 4\pi\rho$, если плотность зарядов $\rho \neq 0$;
2) уравнению Лапласа $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0$, если плотность зарядов $\rho = 0$.

Итак, мы вывели, каким должно быть псевдориманово пространство, допускающее движение заряженной частицы в постоянном электромагнитном поле. Теперь естественным было бы получить точные решения уравнений частицы для какого-либо конкретного случая. Но, пока не задана конкретная структура самого поля (уравнениями Максвелла), этого сделать нельзя. Поэтому, для простоты вычислений, будем считать, что электрическое поле является однородным. Пусть ковариантный вектор напряженности электрического поля E_i, являющийся хронометрическим инвариантом, направлен вдоль оси x. Так же, как Ландау и Лифшиц (см. §20 *Теории поля*), мы рассмотрим случай *отталкивания* заряженной частицы полем, т.е. когда напряженность электрического поля имеет отрицательное численное значение, а координата частицы x возрастает

(естественно, в случае *притяжения* частицы полем напряженность является положительной, а координата частицы убывает). Тогда компоненты вектора напряженности E_i составляют

$$E_1 = E_x = -E = const, \qquad E_2 = E_3 = 0\,. \tag{3.226}$$

Следовательно, т.к. однородность электрического поля означает $E_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i} = const$, то скалярный потенциал φ является функцией от x, удовлетворяющей уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial E}{\partial x} = 0\,. \tag{3.227}$$

Это означает, что однородное постоянное электрическое поле соответствует условию отсутствия зарядов $\rho = 0$.

Пусть частица движется сонаправлено с вектором напряженности электрического поля E_i, т.е. вдоль оси x. Тогда ее уравнения движения с силой Лоренца в правой части примут следующий вид (покомпонентно)

$$\frac{dm}{d\tau} = -\frac{e}{c^2}\frac{d\varphi}{d\tau} = -\frac{e}{c^2}\frac{d\varphi}{dx^i}\,\mathrm{v}^i = \frac{e}{c^2}\,E\,\frac{dx}{d\tau}\,, \tag{3.228}$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(m\frac{dx}{d\tau}\right) = eE\,, \quad \frac{d}{d\tau}\left(m\frac{dy}{d\tau}\right) = 0\,, \quad \frac{d}{d\tau}\left(m\frac{dz}{d\tau}\right) = 0\,. \tag{3.229}$$

Интегрируя скалярное уравнение движения (теорему живых сил), получаем интеграл живых сил

$$m = \frac{eE}{c^2}\,x + B\,, \qquad B = const. \tag{3.230}$$

Постоянную B можно получить из начальных условий интегрирования $m|_{\tau=0} = m_{(0)}$ и $x|_{\tau=0} = x_{(0)}$

$$B = m_{(0)} - \frac{eE}{c^2}\,x_{(0)}\,, \tag{3.231}$$

тогда решение (3.230) скалярного уравнения движения принимает вид

$$m = \frac{eE}{c^2}\left(x - x_{(0)}\right) + m_{(0)}\,. \tag{3.232}$$

Подставляя полученный интеграл живых сил в векторные уравнения движения (3.229), приводим их к следующему виду (точка обозначает дифференцирование по физическому наблюдаемому

времени τ)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{eE}{c^2}\,\dot{x}^2 + \left(B + \frac{eE}{c^2}\,x\right)\ddot{x} = eE \\ &\frac{eE}{c^2}\,\dot{x}\dot{y} + \left(B + \frac{eE}{c^2}\,x\right)\ddot{y} = 0 \\ &\frac{eE}{c^2}\,\dot{x}\dot{z} + \left(B + \frac{eE}{c^2}\,x\right)\ddot{z} = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{3.233}$$

Второе и третье уравнения представляют собой уравнения с разделяющимися переменными

$$\frac{\ddot{y}}{y} = \frac{-\frac{eE}{c^2}\,\dot{x}}{B + \frac{eE}{c^2}\,x}\,, \qquad \frac{\ddot{z}}{z} = \frac{-\frac{eE}{c^2}\,\dot{x}}{B + \frac{eE}{c^2}\,x}\,, \tag{3.234}$$

которые легко интегрируются. Их решения являются простыми и имеют следующий вид, соответственно,

$$\dot{y} = \frac{C_1}{B + \frac{eE}{c^2}\,x}\,, \qquad \dot{z} = \frac{C_2}{B + \frac{eE}{c^2}\,x}\,, \tag{3.235}$$

где C_1 и C_2 константы интегрирования, которые находим, задав начальные условия $\dot{y}|_{\tau=0} = \dot{y}_{(0)}$ и $\dot{x}|_{\tau=0} = \dot{x}_{(0)}$ и используя выражение для B (3.121). В результате мы имеем

$$C_1 = m_{(0)}\,\dot{y}_{(0)}\,, \qquad C_2 = m_{(0)}\,\dot{z}_{(0)}\,. \tag{3.236}$$

Теперь решим уравнения движения вдоль оси x, т.е. первое уравнение из системы (3.233). Для этого сделаем в нем замену переменных $\dot{x} = \frac{dx}{d\tau} = p$. Тогда

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dx}\frac{dx}{dt} = pp', \tag{3.237}$$

и указанное уравнение движения вдоль оси x принимает вид уравнения с разделяющимися переменными

$$\frac{p\,dp}{1 - \frac{p^2}{c^2}} = \frac{eE\,dx}{B + \frac{eE}{c^2}\,x}\,, \tag{3.238}$$

представляющее собой табличный интеграл. После интегрирования получаем его решение

$$\sqrt{1 - \frac{p^2}{c^2}} = \frac{C_3}{B + \frac{eE}{c^2}\,x}\,, \qquad C_3 = const. \tag{3.239}$$

Полагая $p = \dot{x}|_{\tau=0} = \dot{x}_{(0)}$ и подставляя B из (3.231), находим постоянную интегрирования

$$C_3 = m_{(0)}\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2_{(0)}}{c^2}}\,. \tag{3.240}$$

В рассматриваемом случае можно произвести замену интервала физического наблюдаемого времени $d\tau$ на интервал координатного времени dt. И мы сейчас объясним, почему.

В *Теории поля* Ландау и Лифшиц решали уравнения движения заряженной частицы в галилеевой системе отсчета пространства Минковского. Естественно, чтобы как-то сопоставить наши решения с их результатами, мы рассматриваем такой же, как и у них, частный случай — движение в стационарном и однородном поле (см. §20 *Теории поля*). Но тогда, как мы показали в начале параграфа методами математического аппарата хронометрических инвариантов, $F_i = 0$ и $A_{ik} = 0$, следовательно

$$d\tau = \left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)dt - \frac{1}{c^2}\,v_i\,dx^i = dt\,, \tag{3.241}$$

т.е. в рассматриваемой четырехмерной области, где движется частица, метрика является галилеевой. Итак, подставляя $p = \frac{dx}{dt}$ в выражение (3.239), получаем последнее уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dx}{dt} = c\,\frac{\sqrt{\left(B + \frac{eE}{c^2}\,x\right)^2 - C_3^2}}{B + \frac{eE}{c^2}\,x}\,, \tag{3.242}$$

решение которого есть

$$ct = \frac{c^2}{eE}\sqrt{\left(B + \frac{eE}{c^2}\,x\right)^2 - C_3^2} + C_4\,, \quad C_4 = const, \tag{3.243}$$

где константа интегрирования C_4, с учетом начальных условий в момент времени $t = 0$, составляет

$$C_4 = -\frac{m_{(0)}c}{eE}\,\dot{x}_{(0)}\,. \tag{3.244}$$

Теперь, выразив в явном виде координату x из (3.243) через t, мы получаем окончательное решения уравнений движения заряженной массовой частицы вдоль оси x

$$x = \frac{c^2}{eE}\left[\sqrt{\frac{e^2E^2}{c^4}\,(ct - C_4)^2 + C_3^2} - B\right], \tag{3.245}$$

или, после подстановки значений констант интегрирования,

$$x=\sqrt{\left(ct+\frac{m_{(0)}c\dot{x}_{(0)}}{eE}\right)^2+\left(\frac{m_{(0)}c^2}{eE}\right)^2\left(1-\frac{\dot{x}_{(0)}^2}{c^2}\right)}-\frac{m_{(0)}c^2}{eE}+x_{(0)}\,. \quad (3.246)$$

Естественно, если рассматривать поле, притягивающее заряженную частицу, т.е. когда электрическая напряженность принимает положительное значение $E_1=E_x=E=const$), в качестве решения уравнений движения мы получим такое же выражение для координаты x, но с обратным знаком:

$$x=\frac{c^2}{eE}\left[B-\sqrt{\frac{e^2E^2}{c^4}\left(ct-C_4\right)^2+C_3^2}\,\right]. \quad (3.247)$$

В §20 *Теории поля* рассматривается аналогичная задача, однако Ландау и Лифшиц решают ее путем интегрирования трехмерных компонент общековариантных уравнений движения заряженной частицы (трехмерных уравнений Минковского) без учета теоремы живых сил. В результате их выражение для координаты x имеет вид

$$x=\frac{1}{eE}\sqrt{\left(m_0c^2\right)^2+\left(ceEt\right)^2}\,. \quad (3.248)$$

Это полностью совпадает с нашим решением (3.245) в том случае, если положить начальную скорость частицы равной нулю $\dot{x}_{(0)}=0$ и потребовать, чтобы выполнялось следующее соотношение $x_{(0)}-\frac{m_{(0)}c^2}{eE}=0$. Последнее соответствует существенному упрощению, принятому в *Теории поля*, согласно которому ряд констант интегрирования полагаются равными нулю. Как видите, даже при решении уравнений движения в галилеевой системе отсчета плоского пространства Минковского метод хронометрических инвариантов дает преимущества, сразу выявляя влияние скрытых факторов, незаметных при решении обычных трехмерных компонент общековариантных уравнений движения. Это означает, что даже тогда, когда физические наблюдаемые величины совпадают с координатными величинами, геометрически правильным является решение *системы* из хронометрически инвариантных (физических наблюдаемых) уравнений движения, т.к. теорема живых сил как скалярное уравнение движения неизбежно влияет на решение трехмерных векторных уравнений движения. Разумеется, при неоднородном нестационарном электрическом поле в нашем решении появляются дополнительные члены, вызванные влиянием более сложной, меняющейся со временем структуры.

Теперь вычислим трехмерную траекторию частицы в стационарном однородном электрическом поле. Для этого проинтегрируем уравнение движения вдоль осей y и z (3.235), выразим оттуда время и подставим в полученное нами решение для x.

Вначале, подставляя в уравнение для $\dot{y}$ полученное решение для x (3.245), мы получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{dt} = \frac{C_1}{\sqrt{\frac{e^2E^2}{c^4}\left(ct - C_4\right)^2 + C_3^2}}\,, \tag{3.249}$$

интегрируя которое, имеем

$$y = \frac{m_{(0)}\,\dot{y}_{(0)}\,c}{eE}\,\operatorname{arc\,sinh}\frac{eEt + m_{(0)}\,\dot{x}_{(0)}}{m_{(0)}\,c\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2_{(0)}}{c^2}}} + C_5\,, \tag{3.250}$$

где C_5 новая постоянная интегрирования. Из начальных условий $y = y_{(0)}$ и $t = 0$ при находим

$$C_5 = y_{(0)} - \frac{m_{(0)}\,\dot{y}_{(0)}\,c}{eE}\,\operatorname{arc\,sinh}\frac{\dot{x}_{(0)}}{c\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2_{(0)}}{c^2}}}\,. \tag{3.251}$$

Подставляя полученную константу в исходное выражение для y (3.250), окончательно получаем

$$y = y_{(0)} + \frac{m_{(0)}\,\dot{y}_{(0)}\,c}{eE}\times \\ \times\left\{\operatorname{arc\,sinh}\frac{eEt + m_{(0)}\dot{x}_{(0)}}{m_{(0)}\,c\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2_{(0)}}{c^2}}} - \operatorname{arc\,sinh}\frac{\dot{x}_{(0)}}{c\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2_{(0)}}{c^2}}}\right\}. \tag{3.252}$$

Выразим отсюда t через y и $y_{(0)}$, учитывая, что $a = \operatorname{arc\,sinh} b$ при $b = \sinh a$, и сделав во втором члене замену $\operatorname{arc\,sinh} b = \ln\left(b + \sqrt{b^2+1}\right)$

$$t = \frac{1}{eE}\left\{m_{(0)}\,c\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2_{(0)}}{c^2}}\,\times \right. \\ \left.\times\,\sinh\left[\frac{y - y_{(0)}}{m_{(0)}\,\dot{y}_{(0)}\,c}\,eE + \ln\frac{\dot{x}_{(0)} + c}{c\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2_{(0)}}{c^2}}}\right] - m_{(0)}\,\dot{x}_{(0)}\right\}. \tag{3.253}$$

Теперь подставим это выражение в наше решение для x (3.246). В результате получаем искомое уравнение для трехмерной траектории частицы

$$x = x_{(0)} + \frac{m_{(0)} c^2}{eE}\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2_{(0)}}{c^2}} \times \\ \times \cosh\left\{\frac{y - y_{(0)}}{m_{(0)}\dot{y}_{(0)}c}\, eE + \ln\frac{\dot{x}_{(0)} + c}{c\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2_{(0)}}{c^2}}}\right\} - \frac{m_{(0)} c^2}{eE}\,. \qquad (3.254)$$

Полученное выражение означает, что заряженная массовая частица нашего мира движется в однородном стационарном электрическом поле по кривой, в основе которой лежит *цепная линия*, а отклоняющие ее от “чистой” цепной линии факторы являются функциями начальных условий. Наше выражение для траектории частицы (3.254) полностью совпадает с результатом *Теории поля*

$$x = \frac{m_{(0)} c^2}{eE}\,\cosh\frac{eEy}{m_{(0)}\dot{y}_{(0)}c} \qquad (3.255)$$

(формула 20.5 в §20 [10]), если предположить, что начальная скорость частицы $x_{(0)} - \frac{m_{(0)}c^2}{eE} = 0$, а также $\dot{x}_{(0)} = 0$, причем последнее означает предположение о равенстве нулю постоянной интегрирования скалярного уравнения движения (теоремы живых сил), что, вообще говоря, является серьезным допущением. При малых скоростях, приравняв к нулю релятивистские соотношения и разложив гиперболический косинус в ряд $\cosh b = 1 + \frac{b^2}{2!} + \frac{b^4}{4!} + \frac{b^6}{6!} + \ldots$, наше выражение для трехмерной траектории частицы (3.254), с точностью до членов второго порядка малости, принимает вид

$$x = x_{(0)} + \frac{eE\left(y - y_{(0)}\right)^2}{2m_{(0)}\dot{y}^2_{(0)}}\,, \qquad (3.256)$$

т.е. частица движется по *параболе*. Этот вывод, если положить начальные координаты равными нулю, также соответствует результату из *Теории поля*

$$x = \frac{eEy^2}{2m_{(0)}\dot{y}^2_{(0)}}\,. \qquad (3.257)$$

При интегрировании уравнения движения вдоль оси z получаются точно такие же результаты. Происходит это потому, что уравнения относительно $\dot{y}$ и $\dot{z}$ (3.235) различаются всего лишь постоянным

множителем — константой интегрирования (3.236), равной начальному импульсу частицы вдоль оси y (в уравнении для $\dot{y}$) и вдоль оси z (в уравнении для $\dot{z}$).

Переходя от кинематики к динамике, найдем динамические характеристики движения заряженной частицы в стационарном однородном электрическом поле — ее релятивистскую энергию и импульс. Вычислив релятивистский корень (при используемых нами допущениях)

$$\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}=\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{c^2}}=\frac{m_{(0)}\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2_{(0)}+\dot{y}^2_{(0)}+\dot{z}^2_{(0)}}{c^2}}}{m_{(0)}+\frac{eE}{c^2}\left(x-x_{(0)}\right)}\,, \tag{3.258}$$

получаем энергию частицы

$$E=\frac{m_{(0)}c^2}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}=\frac{m_{(0)}c^2+eE\left(x-x_{(0)}\right)}{\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2_{(0)}+\dot{y}^2_{(0)}+\dot{z}^2_{(0)}}{c^2}}}\,, \tag{3.259}$$

которая при скорости частицы, много меньшей скорости света принимает вид

$$E=m_{(0)}c^2+eE\left(x-x_{(0)}\right). \tag{3.260}$$

Соответствующим образом вычисляется и релятивистский импульс частицы, однако, из-за громоздкости получившегося выражения, мы его не приводим.

Итак, мы исследовали движение в стационарном однородном электрическом поле массовой заряженой частицы нашего мира. Теперь рассмотрим движение массовой заряженной частицы зазеркалья при таких же условиях. Ее хронометрически инвариантные уравнения движения, с учетом принятых в этом параграфе ограничений на геометрическую структуру пространства, имеют вид

$$\frac{dm}{d\tau}=\frac{e}{c^2}\frac{d\varphi}{d\tau}\,, \tag{3.261}$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(m\mathrm{v}^i\right)=-\frac{e}{c}\frac{dq^i}{d\tau}\,, \tag{3.262}$$

т.е. отличаются от уравнений движения частицы нашего мира (3.221, 3.222) лишь знаком в теореме живых сил.

Положим, что электрическая напряженность принимает отрицательные значения (*отталкивание* частицы полем) и что частица движется сонаправлено с вектором напряженности поля вдоль

оси x. Тогда, интегрируя теорему живых сил для частицы зазеркалья (3.261) получаем

$$m = -\frac{eE}{c^2}\,x + B\,, \tag{3.263}$$

где постоянная интегрирования, вычисленная из начальных условий

$$B = m_{(0)} + \frac{eE}{c^2}\,x_{(0)}\,. \tag{3.264}$$

Подставляя это значение m в векторные уравнения движения (3.262), записанные покомпонентно, имеем (сравн. с форм. 3.233)

$$\left.\begin{aligned} -\frac{eE}{c^2}\,\dot{x}^2 + \left(B - \frac{eE}{c^2}\,x\right)\ddot{x} = eE \\ -\frac{eE}{c^2}\,\dot{x}\dot{y} + \left(B - \frac{eE}{c^2}\,x\right)\ddot{y} = 0 \\ -\frac{eE}{c^2}\,\dot{x}\dot{z} + \left(B - \frac{eE}{c^2}\,x\right)\ddot{z} = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{3.265}$$

После вычислений, аналогичных действиям по нахождению траектории заряженной частицы нашего мира, получаем

$$x = \frac{c^2}{eE}\left[B - \sqrt{C_3^2 - \frac{e^2E^2}{c^4}\,(ct - C_4)^2}\,\right], \tag{3.266}$$

где $C_3 = m_{(0)}\sqrt{1 + \frac{\dot{x}^2_{(0)}}{c^2}}$ и $C_4 = -\frac{c\,m_{(0)}\,\dot{x}_{(0)}}{eE}$. Или,

$$x = -\sqrt{\left(\frac{m_{(0)}c^2}{eE}\right)^2\left(1 + \frac{\dot{x}^2_{(0)}}{c^2}\right) - \left(ct + \frac{m_{(0)}c\dot{x}_{(0)}}{eE}\right)^2} + \frac{m_{(0)}c^2}{eE} + x_{(0)}\,. \tag{3.267}$$

Полученное здесь выражение для координаты x заряженной частицы зазеркалья, *отталкиваемой* полем, аналогично решению для частицы нашего мира в случае ее *притяжения* таким же полем $E_1 = E_x = E = const$ (3.247).

Таким образом, получается очень интересный вывод: переход заряженой частицы из нашего мира в зазеркалье (мир с обратным ходом времени) равносилен смене знака ее заряда.

Отметим, аналогичный вывод делается и в отношении масс частиц: гипотетический переход частицы из нашего мира в зазеркалье

равносилен смене знака ее массы. Таким образом, частицы нашего мира и частицы зазеркалья являются сопряженными не только по массе, но и зарядово сопряженными.

Теперь найдем трехмерную траекторию заряженной массовой частицы зазеркалья в стационарном однородном электрическом поле. Вычисляя координату y точно так же, как и для заряженной частицы нашего мира, получаем

$$y = y_{(0)} + \frac{m_{(0)}\dot{y}_{(0)}c}{eE} \times \\ \times \left\{ \arcsin \frac{eEt + m_{(0)}\dot{x}_{(0)}}{m_{(0)}c\sqrt{1+\frac{\dot{x}^2_{(0)}}{c^2}}} - \arcsin \frac{\dot{x}_{(0)}}{c\sqrt{1+\frac{\dot{x}^2_{(0)}}{c^2}}} \right\}, \tag{3.268}$$

где, по сравнению с выражением для частицы нашего мира (3.252), стоит обычный arcsin и в корне — знак “плюс”.

Выражая отсюда время t через координаты y и $y_{(0)}$

$$t = \frac{1}{eE} \left\{ m_{(0)}c\sqrt{1+\frac{\dot{x}^2_{(0)}}{c^2}} \times \right. \\ \left. \times \sin\left[\frac{y-y_{(0)}}{m_{(0)}\dot{y}_{(0)}c}\, eE + \ln \frac{\dot{x}_{(0)}+c}{c\sqrt{1+\frac{\dot{x}^2_{(0)}}{c^2}}} \right] - m_{(0)}\dot{x}_{(0)} \right\}, \tag{3.269}$$

и подставляя в наше выражение для x (3.267), получаем уравнение трехмерной траектории заряженной массовой частицы зазеркалья, движущейся в однородном стационарном электрическом поле,

$$x = x_{(0)} - \frac{m_{(0)}c^2}{eE}\sqrt{1+\frac{\dot{x}^2_{(0)}}{c^2}} \times \\ \times \cos\left\{ \frac{y-y_{(0)}}{m_{(0)}\dot{y}_{(0)}c}\, eE + \arcsin \frac{\dot{x}_{(0)}}{c\sqrt{1+\frac{\dot{x}^2_{(0)}}{c^2}}} \right\} - \frac{m_{(0)}c^2}{eE}\,. \tag{3.270}$$

т.е. движение частицы представляет собой *гармоническое колебание*. Если предположить начальные координаты частицы равными нулю, а также ее начальную скорость $\dot{x}_{(0)} = 0$ и константу интегрирования

теоремы живых сил $B=0$, то полученное уравнение траектории примет упрощенный вид

$$x=-\frac{m_{(0)}c^2}{eE}\,\cos\frac{eEy}{m_{(0)}\dot{y}_{(0)}c}\,. \tag{3.271}$$

При малой скорости движения частицы, приравняв к нулю релятивистские соотношения и разложив косинус в ряд $\cos b=1-\frac{b^2}{2!}+$ $+\frac{b^4}{4!}-\frac{b^6}{6!}+\ldots\approx 1-\frac{b^2}{2!}$ (что всегда можно сделать на малом участке траектории), наше выражение для трехмерной траектории частицы зазеркалья (3.270) принимает вид

$$x=x_{(0)}+\frac{eE\left(y-y_{(0)}\right)^2}{2m_{(0)}\dot{y}_{(0)}^2}\,, \tag{3.272}$$

т.е. уравнение *параболы*. Это означает, что заряженная частица зазеркалья на малой скорости, как и частица нашего мира движется по параболе. Таким образом релятивистская заряженная частица нашего мира движется в однородном стационарном электрическом поле по цепной линии, при малых скоростях переходящей в параболу. Релятивистская заряженная частица зазеркалья движется по гармонической траектории, на малых участках которой, при малой скорости, ее движение (как и частицы нашего мира) происходит по параболе. При этом для заряженной частицы зазеркалья не существует светового барьера, т.к. уравнение ее траектории содержит релятивистский корень со знаком "плюс", а не "минус".

§ 3.12 Движение заряженной частицы в стационарном магнитном поле

Рассмотрим движение заряженной частицы в случае, когда электрическая составляющая поля отсутствует, а присутствует лишь стационарное магнитное поле. Тогда

$$E_i=\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^i}-\frac{\varphi}{c^2}\,F_i=\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}-\frac{\varphi}{c^2}\frac{1}{1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}}\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial x^i}=0\,, \tag{3.273}$$

$$H^{*i}=\frac{1}{2}\,\varepsilon^{imn}H_{mn}=\frac{1}{2}\,\varepsilon^{imn}\left(\frac{\partial q_m}{\partial x^n}-\frac{\partial q_n}{\partial x^m}-\frac{2\varphi}{c}\,A_{mn}\right)\neq 0\,, \tag{3.274}$$

так как в "чисто" магнитном поле $\varphi=const$ ($E_i=0$), т.е. гравитационным воздействием можно пренебречь. Из второго выражения видно, что магнитная напряженность H^{*i} отлична от нуля, если выполняется хотя бы одно из условий:

1) поле потенциала q^i является вихревым, что иначе означает $\frac{\partial q_i}{\partial x^k} - \frac{\partial q_k}{\partial x^i} \neq 0$;
2) пространство является неголономным, т.е. $A_{ik} \neq 0$.

Мы будем рассматривать движение частицы для общего случая, когда имеют место оба условия, т.к. неголономное пространство будет нами использовано в Главе 4 как базовое пространство для частицы обладающей спином (внутренним механическим моментом). Как и в предыдущем параграфе, будем полагать деформацию пространства равной нулю, а трехмерную метрику евклидовой $g_{ik} = \delta_{ik}$. Однако наблюдаемая метрика $h_{ik} = -g_{ik} + \frac{1}{c^2} v_i v_k$ в данном случае негалилеева, т.к. в неголономном пространстве, совершенно очевидно, $h_{ik} \neq -g_{ik}$ по причине $v_i \neq 0$.

Пусть пространство отсчета вращается относительно оси z с постоянной угловой скоростью $\Omega_{12} = -\Omega_{21} = \Omega$. Тогда линейная скорость вращения пространства $v_i = \Omega_{ik} x^k$ имеет две не равные нулю компоненты $v_1 = \Omega y$ и $v_2 = -\Omega x$, а у тензора неголономности отличны от нуля лишь компоненты $A_{12} = -A_{21} = -\Omega$. В этом случае метрика принимает вид

$$ds^2 = c^2 dt^2 - 2\Omega y\, dt\, dx + 2\Omega x\, dt\, dy - dx^2 - dy^2 - dz^2. \qquad (3.275)$$

В пространстве с такой метрикой $F_i = 0$ и $D_{ik} = 0$. В дальнейшем мы будем пользоваться этой метрикой при исследовании движения заряженной частицы в в стационарных полях.

В предыдущем параграфе, посвященном движению в стационарном электрическом поле, мы дополнительно полагали символы Кристоффеля равными нулю, т.е. рассматривали движение частицы в галилеевой системе отчета (пространство Минковского). Однако, в этом параграфе, т.к. трехмерная наблюдаемая метрика h_{ik} не является евклидовой из-за наличия собственного вращения пространства, хронометрически инвариантные символы Кристоффеля (1.47) не равны нулю.

Если линейная скорость вращения пространства не является пренебрежимо малой по сравнению со скоростью света, то компоненты наблюдаемого метрического тензора h_{ik} равны

$$h_{11} = 1 + \frac{\Omega^2 y^2}{c^2}\,, \quad h_{22} = 1 + \frac{\Omega^2 x^2}{c^2}\,, \quad h_{12} = -\frac{\Omega^2 xy}{c^2}\,, \quad h_{33} = 1\,, \qquad (3.276)$$

тогда детерминант этого тензора и компоненты обратной матрицы h^{ik} принимают следующий вид

$$h = \det \| h_{ik} \| = h_{11} h_{22} - h_{12}^2 = 1 + \frac{\Omega^2 \left(x^2 + y^2\right)}{c^2}\,, \qquad (3.277)$$

$$\left.\begin{aligned} h^{11} &= \frac{1}{h}\left(1+\frac{\Omega^2 x^2}{c^2}\right), \qquad & h^{22} &= \frac{1}{h}\left(1+\frac{\Omega^2 y^2}{c^2}\right) \\ h^{12} &= \frac{\Omega^2 xy}{hc^2}\,, & h^{33} &= 1 \end{aligned}\right\}. \tag{3.278}$$

Соответственно, не равные нулю компоненты хронометрически инвариантных символов Кристоффеля Δ^i_{jk} (1.47) равны

$$\Delta^1_{11} = -\frac{2\,\Omega^4 x y^2}{c^4\left[1+\frac{\Omega^2(x^2+y^2)}{c^2}\right]}\,, \tag{3.279}$$

$$\Delta^1_{12} = \frac{\Omega^2 y\left(1+\frac{2\Omega^2 x^2}{c^2}\right)}{c^2\left[1+\frac{\Omega^2(x^2+y^2)}{c^2}\right]}\,, \tag{3.280}$$

$$\Delta^1_{22} = -\frac{2\Omega^2 x}{c^2}\,\frac{1+\frac{\Omega^2 x^2}{c^2}}{1+\frac{\Omega^2(x^2+y^2)}{c^2}}\,, \tag{3.281}$$

$$\Delta^2_{11} = -\frac{2\Omega^2 y}{c^2}\,\frac{1+\frac{\Omega^2 y^2}{c^2}}{1+\frac{\Omega^2(x^2+y^2)}{c^2}}\,, \tag{3.282}$$

$$\Delta^2_{12} = \frac{\Omega^2 x\left(1+\frac{\Omega^2 y^2}{c^2}\right)}{c^2\left[1+\frac{\Omega^2(x^2+y^2)}{c^2}\right]}\,, \tag{3.283}$$

$$\Delta^2_{22} = -\frac{2\Omega^4 x^2 y}{c^4\left[1+\frac{\Omega^2(x^2+y^2)}{c^2}\right]}\,. \tag{3.284}$$

Теперь приступим к решению уравнений движения в стационарном магнитном поле. Для простоты положим, что четырехмерный потенциал поля A^α направлен по касательной к четырехмерной траектории частицы. Так как электрическая составляющая поля отсутствует, правая часть скалярного уравнения движения равна нулю. Таким образом, хронометрически инвариантные уравнения движения массовой заряженной частицы нашего мира (3.208, 3.209) в стационарном магнитном поле принимают вид

$$\frac{dm}{d\tau} = 0\,, \tag{3.285}$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(m\mathrm{v}^i\right) + 2mA^{\cdot i}_{k\cdot}\mathrm{v}^k + m\Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k = -\frac{e}{c}\,\varepsilon^{ikm}\mathrm{v}_k H_{*m}\,. \tag{3.286}$$

Для массовой заряженной частицы зазеркалья, движущейся в стационарном магнитном поле, уравнения движения, соответственно, выглядят следующим образом

$$-\frac{dm}{d\tau}=0\,, \tag{3.287}$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(m\mathrm{v}^i\right)+m\Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k=-\frac{e}{c}\,\varepsilon^{ikm}\mathrm{v}_k H_{*m}\,. \tag{3.288}$$

После интегрирования теоремы живых сил для частицы нашего мира и частицы зазеркалья, соответственно, получаем

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}=const=B\,,\qquad -m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}=const=\widetilde{B}\,, \tag{3.289}$$

где B и $\widetilde{B}$ постоянные интегрирования. Это означает, что $\mathrm{v}^2=const$, т.е. модуль наблюдаемой скорости частицы остается постоянным в отсутствие электрической составляющей поля. Тогда векторные уравнения движения для частицы нашего мира (3.286) можно записать следующим образом

$$\frac{d\mathrm{v}^i}{d\tau}+2A^{\cdot i}_{k\cdot}\mathrm{v}^k+\Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k=-\frac{e}{mc}\,\varepsilon^{ikm}\mathrm{v}_k H_{*m}\,. \tag{3.290}$$

Соответственно, векторные уравнения движения частицы зазеркалья (3.288) примут вид

$$\frac{d\mathrm{v}^i}{d\tau}+\Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k=-\frac{e}{mc}\,\varepsilon^{ikm}\mathrm{v}_k H_{*m}\,. \tag{3.291}$$

Напряженность магнитного поля в этих уравнениях определяется из системы уравнений Максвелла для стационарного поля (3.215, 3.216), которое, в отсутствие электрической напряженности и при используемых в этом параграфе ограничениях, принимает вид

$$\left.\begin{aligned}&\Omega_{*m}H^{*m}=-2\pi c\rho\\ &\varepsilon^{ikm}\,{}^*\nabla_k\big(H_{*m}\sqrt{h}\big)=\frac{4\pi}{c}\,j^i\sqrt{h}\end{aligned}\right\}\quad \mathrm{I}\,, \tag{3.292}$$

$${}^*\nabla_i\,H^{*i}=\frac{\partial H^{*i}}{\partial x^i}+\frac{\partial\ln\sqrt{h}}{\partial x^i}\,H^{*i}=0\;\Big\}\;\mathrm{II}\,. \tag{3.293}$$

Из первого уравнения первой группы следует, что скалярное произведение псевдовекторов поля неголономности пространства и напряженности магнитного поля есть функция плотности распределения заряда. Соответственно, если плотность заряда $\rho=0$, псевдо-

векторы Ω_{*i} и H^{*i} взаимно ортогональны. Рассмотрим различные случаи ориентации магнитного поля по отношения к полю неголономности пространства.

§3.12.1 Магнитное поле сонаправлено с полем неголономности

Пусть псевдовектор напряженности магнитного поля H^{*i} направлен вдоль оси z, т.е. так же как и псевдовектор угловой скорости вращения пространства $\Omega^{*i}=\frac{1}{2}\,\varepsilon^{ikm}A_{km}$. Тогда у псевдовектора угловой скорости отлична от нуля компонента $\Omega^{*3}=\Omega$, а у псевдовектора магнитной напряженности

$$H^{*3}=\frac{1}{2}\,\varepsilon^{3mn}H_{mn}=\frac{1}{2}\left(\varepsilon^{312}H_{12}+\varepsilon^{321}H_{21}\right)=H_{12}= \\ =\frac{\varphi}{c}\left(\frac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial x}-\frac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial y}\right)+\frac{2\varphi}{c}\,\Omega\,. \tag{3.294}$$

Условие $\varphi=const$ есть следствие отсутствия электрического поля. С учетом этого уравнения Максвелла 1-й группы (2.392) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} &\Omega_{*3}H^{*3}=\frac{\Omega\varphi}{c}\left(\frac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial x}-\frac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial y}\right)+\frac{2\varphi\,\Omega^2}{c}=-2\pi c\rho \\ &\frac{\partial}{\partial y}\left(H_{*3}\sqrt{h}\right)=\frac{4\pi}{c}\,j^1\sqrt{h} \\ &-\frac{\partial}{\partial x}\left(H_{*3}\sqrt{h}\right)=\frac{4\pi}{c}\,j^2\sqrt{h} \\ &j^3=0 \end{aligned}\right\}. \tag{3.295}$$

Уравнения 2-й группы (3.293) являются тривиальными, т.к. сводятся к простому соотношению $\frac{\partial H^{*3}}{\partial z}=0$, т.е. $H^{*3}=const$. Фактически это означает, что рассматриваемое нами стационарное магнитное поле является однородным вдоль оси z. В дальнейшем мы будем считать стационарное магнитное поле полностью однородным, т.е. $H^{*i}=const$. Тогда из первого уравнения 1-й группы (3.295) следует, что магнитное поле является однородным, если

$$\left(\frac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial x}-\frac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial y}\right)=const, \qquad \rho=-\frac{\varphi\,\Omega^2}{\pi c^2}=const. \tag{3.296}$$

Таким образом плотность заряда $\rho>0$, если скалярный потенциал поля $\varphi<0$. В этом случае остальные уравнения 1-й группы

(3.295) примут следующий вид

$$\left.\begin{aligned} j^1 &= \frac{c}{4\pi}\frac{\partial \ln\sqrt{h}}{\partial y} \\ j^2 &= \frac{c}{4\pi}\frac{\partial \ln\sqrt{h}}{\partial x} \\ j^3 &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{3.297}$$

Отсюда, т.к. $h = 1 + \frac{\Omega^2(x^2+y^2)}{c^2}$ (3.277), следует: вектор тока в стационарном однородном магнитном поле не равен нулю только при *сильном* поле неголономности, т.е. когда скорость вращения пространства сравнима со скоростью света. В слабом поле неголономности $h = 1$, следовательно $j^1 = j^2 = 0$.

Теперь, зная магнитную напряженность из уравнений Максвелла, запишем покомпонентно векторные уравнения движения заряженной массовой частицы (3.290, 3.291) в нашем мире

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{x} + \frac{2\Omega}{h}\left[\frac{\Omega^2 xy\dot{x}}{c^2} + \left(1 + \frac{\Omega^2 x^2}{c^2}\right)\dot{y}\right] + \Delta^1_{11}\dot{x}^2 + 2\Delta^1_{12}\dot{x}\dot{y} + \\ &\qquad + \Delta^1_{22}\,\dot{y}^2 = -\frac{eH}{mc}\left[-\frac{\Omega^2 xy\dot{x}}{c^2} + \left(1 + \frac{\Omega^2 x^2}{c^2}\right)\dot{y}\right] \\ &\ddot{y} - \frac{2\Omega}{h}\left[\frac{\Omega^2 xy\dot{y}}{c^2} + \left(1 + \frac{\Omega^2 y^2}{c^2}\right)\dot{x}\right] + \Delta^2_{11}\dot{x}^2 + 2\Delta^2_{12}\dot{x}\dot{y} + \\ &\qquad + \Delta^2_{22}\,\dot{y}^2 = \frac{eH}{mc}\left[-\frac{\Omega^2 xy\dot{y}}{c^2} + \left(1 + \frac{\Omega^2 y^2}{c^2}\right)\dot{x}\right] \\ &\ddot{z} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.298}$$

и в зазеркалье

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{x} + \Delta^1_{11}\dot{x}^2 + 2\Delta^1_{12}\dot{x}\dot{y} + \Delta^1_{22}\,\dot{y}^2 = \\ &\qquad = -\frac{eH}{mc}\left[-\frac{\Omega^2 xy\dot{x}}{c^2} + \left(1 + \frac{\Omega^2 x^2}{c^2}\right)\dot{y}\right] \\ &\ddot{y} + \Delta^2_{11}\dot{x}^2 + 2\Delta^2_{12}\dot{x}\dot{y} + \Delta^2_{22}\,\dot{y}^2 = \\ &\qquad = \frac{eH}{mc}\left[-\frac{\Omega^2 xy\dot{y}}{c^2} + \left(1 + \frac{\Omega^2 y^2}{c^2}\right)\dot{x}\right] \\ &\ddot{z} = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{3.299}$$

Члены в правых частях уравнений, содержащие $\frac{\Omega^2}{c^2}$, возникают вследствие того, что при вращении пространства трехмерная наблюдаемая метрика h_{ik} не является евклидовой. Поэтому в рассматриваемом случае есть различие между контравариантными компонентами наблюдаемой скорости и ее ковариантными компонентами. В правые части уравнений входят именно ковариантные компоненты скорости

$$\mathrm{v}_2 = h_{21}\mathrm{v}^1 + h_{22}\,\mathrm{v}^2 = -\frac{\Omega^2 xy}{c^2}\,\dot{x} + \left(1 + \frac{\Omega^2 x^2}{c^2}\right)\dot{y}\,, \tag{3.300}$$

$$\mathrm{v}_1 = h_{11}\mathrm{v}^1 + h_{12}\,\mathrm{v}^2 = -\frac{\Omega^2 xy}{c^2}\,\dot{y} + \left(1 + \frac{\Omega^2 y^2}{c^2}\right)\dot{x}\,. \tag{3.301}$$

Если вращение пространства отсутствует, т.е. $\Omega = 0$, то уравнения движения заряженной массовой частицы нашего мира (3.298) с точностью до знака совпадают с уравнениями движения в стационарном однородном магнитном поле, приведенными в книге Ландау и Лифшица (см. формулу 21.2 в §21 *Теории поля*)

$$\ddot{x} = \frac{eH}{mc}\,\dot{y}\,, \qquad \ddot{y} = -\frac{eH}{mc}\,\dot{x}\,, \qquad \ddot{z} = 0\,, \tag{3.302}$$

тогда как из наших уравнений (3.298) следует

$$\ddot{x} = -\frac{eH}{mc}\,\dot{y}\,, \qquad \ddot{y} = \frac{eH}{mc}\,\dot{x}\,, \qquad \ddot{z} = 0\,. \tag{3.303}$$

Это отличие обусловлено тем, что Ландау и Лифшиц положили в силе Лоренца магнитную напряженность со знаком “плюс”, а она у нас имеет знак “минус”, что, впрочем, не является принципиальным, т.к. связано с выбором сигнатурных условий. Если пространство вращается (неголономно), то в уравнения движения входят члены, содержащие Ω, $\frac{\Omega^2}{c^2}$, и $\frac{\Omega^4}{c^4}$.

В сильном поле неголономности решение уравнений движения — довольно сложная задача, возможно, в будущем их удастся решить методами приближенных вычислений на машинах (результаты были бы довольно интересными). Мы будем искать точные решения в слабом поле неголономности, т.е. пренебрегая членами второго и большего порядка малости. В этом случае уравнения движения (3.298, 3.299) примут следующий вид. Для заряженной массовой частицы нашего мира

$$\ddot{x} + 2\Omega\,\dot{y} = -\frac{eH}{mc}\,\dot{y}\,, \qquad \ddot{y} - 2\Omega\dot{x} = \frac{eH}{mc}\,\dot{x}\,, \qquad \ddot{z} = 0\,, \tag{3.304}$$

для заряженной массовой частицы зазеркалья

$$\ddot{x} = -\frac{eH}{mc}\,\dot{y}\,, \qquad \ddot{y} = \frac{eH}{mc}\,\dot{x}\,, \qquad \ddot{z} = 0\,. \tag{3.305}$$

Вначале решим уравнения в нашем мире. Уравнение движения вдоль оси z интегрируется сразу. Его решение

$$z = \dot{z}_{(0)}\,\tau + z_{(0)}\,. \tag{3.306}$$

Отсюда видно: если в начальный момент скорость частицы в направлении оси z равна нулю, частица будет перемещаться только в плоскости $x\,y$. Остальные два уравнения движения из (3.304) перепишем в виде

$$\frac{d\dot{x}}{d\tau} = -\left(2\Omega + \omega\right)\dot{y}\,, \qquad \frac{d\dot{y}}{d\tau} = \left(2\Omega + \omega\right)\dot{x}\,, \tag{3.307}$$

где, для удобства записи, мы обозначаем $\omega = \frac{eH}{mc}$. Такое же обозначение использовали Ландау и Лифшиц в §21 *Теории поля*. Далее, выразим $\dot{x}$ из второго уравнения, продифференцируем его по наблюдаемому времени $\dot{x}$ и подставим в первое уравнение. В результате получаем

$$\frac{d^2\dot{y}}{d\tau^2} + \left(2\Omega + \omega\right)^2\dot{y} = 0\,, \tag{3.308}$$

т.е. уравнение колебаний, решение которого имеет вид

$$\dot{y} = C_1 \cos\left(2\Omega + \omega\right)\tau + C_2 \sin\left(2\Omega + \omega\right)\tau\,, \tag{3.309}$$

где $C_1 = \dot{y}_{(0)}$ и $C_2 = \frac{\ddot{y}_{(0)}}{2\Omega + \omega}$ константы интегрирования. Подставляя $\dot{y}$ (3.309) в первое уравнение (3.307), получаем

$$\frac{d\dot{x}}{d\tau} = -\left(2\Omega + \omega\right)\dot{y}_{(0)} \cos\left(2\Omega + \omega\right)\tau - \ddot{y}_{(0)} \sin\left(2\Omega + \omega\right)\tau\,, \tag{3.310}$$

или, после интегрирования

$$\dot{x} = \dot{y}_{(0)} \sin\left(2\Omega + \omega\right)\tau - \frac{\ddot{y}_{(0)}}{2\Omega + \omega} \cos\left(2\Omega + \omega\right)\tau + C_3\,, \tag{3.311}$$

где константа интегрирования $C_3 = \dot{x}_{(0)} + \frac{\ddot{y}_{(0)}}{2\Omega + \omega}$.

После подстановки всех констант полученные выражения для $\dot{x}$ (3.311) $\dot{y}$ (3.309) принимают окончательный вид

$$\dot{x} = \dot{y}_{(0)} \sin\left(2\Omega{+}\omega\right)\tau - \frac{\ddot{y}_{(0)}}{2\Omega{+}\omega} \cos\left(2\Omega{+}\omega\right)\tau + \dot{x}_{(0)} + \frac{\ddot{y}_{(0)}}{2\Omega{+}\omega}\,, \tag{3.312}$$

$$\dot{y} = \dot{y}_{(0)} \cos\left(2\Omega + \omega\right)\tau + \frac{\ddot{y}_{(0)}}{2\Omega + \omega} \sin\left(2\Omega + \omega\right)\tau\,. \tag{3.313}$$

Таким образом, выражения для компонент скорости частицы $\dot{x}$ и $\dot{y}$ в стационарном однородном магнитном поле суть уравнения гармонических колебаний с частотой, равной, при слабом поле неголономности, $2\Omega + \omega = 2\Omega + \frac{eH}{mc}$.

Из интеграла живых сил в стационарном магнитном поле (3.289) следует, что квадрат скорости частицы — величина постоянная. Вычисляя квадрат физической наблюдаемой скорости $\mathrm{v}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$ для частицы нашего мира, получаем, что величина

$$\begin{gathered}\mathrm{v}^2 = \dot{x}^2_{(0)} + \dot{y}^2_{(0)} + \dot{z}^2_{(0)} + 2\left(\dot{x}_{(0)} + \frac{\ddot{y}_{(0)}}{2\Omega + \omega}\right) \times \\ \times \left[\frac{\ddot{y}_{(0)}}{2\Omega+\omega} + \dot{y}_{(0)} \sin\left(2\Omega+\omega\right)\tau - \frac{\ddot{y}_{(0)}}{2\Omega+\omega} \cos\left(2\Omega+\omega\right)\tau\right]\end{gathered} \tag{3.314}$$

является постоянной ($\mathrm{v}^2 = const$) при условии, что константа интегрирования C_3 равна тому же выражению, что и в уравнении для $\dot{x}$ (3.311), которое мы получили ранее, то есть эта константа равна $C_3 = \dot{x}_{(0)} + \frac{\ddot{y}_{(0)}}{2\Omega + \omega} = 0$.

Интегрируя $\dot{x}$ и $\dot{y}$ по наблюдаемому времени τ, получаем координаты заряженной частицы нашего мира, движущейся в стационарном однородном магнитном поле

$$\begin{gathered}x = \left[\frac{\ddot{y}_{(0)}}{2\Omega + \omega} \sin\left(2\Omega + \omega\right)\tau - \dot{y}_{(0)} \cos\left(2\Omega + \omega\right)\tau\right] \frac{1}{2\Omega + \omega} + \\ + \left(\dot{x}_{(0)} + \frac{\ddot{y}_{(0)}}{2\Omega + \omega}\right)\tau + C_4\,,\end{gathered} \tag{3.315}$$

$$y = \left[\dot{y}_{(0)} \sin\left(2\Omega+\omega\right)\tau + \frac{\ddot{y}_{(0)}}{2\Omega+\omega} \cos\left(2\Omega+\omega\right)\tau\right] \frac{1}{2\Omega+\omega} + C_5\,, \tag{3.316}$$

где константы интегрирования

$$C_4 = x_{(0)} + \frac{\dot{y}_{(0)}}{2\Omega + \omega}\,, \qquad C_5 = y_{(0)} + \frac{\ddot{y}_{(0)}}{\left(2\Omega + \omega\right)^2}\,. \tag{3.317}$$

Из выражения для координаты x видно: частица совершает гармоническое колебание в направлении x, если выполняется соотношение $\dot{x}_{(0)} + \frac{\ddot{y}_{(0)}}{2\Omega + \omega} = 0$. Это является также условием постоянства квадрата скорости частицы (3.314), т.е. удовлетворяет интегралу живых сил.

С учетом этого получаем уравнение траектории частицы в плоскости $x\,y$

$$\begin{aligned} x^2+y^2 = \frac{1}{(2\Omega+\omega)^2}\left[\dot{y}_{(0)}^2 + \frac{\ddot{y}_{(0)}^2}{(2\Omega+\omega)^2}\right] - \frac{2C_4}{2\Omega+\omega}\times \\ \times\left[\dot{y}_{(0)}\cos(2\Omega+\omega)\,\tau + \frac{\ddot{y}_{(0)}}{2\Omega+\omega}\sin(2\Omega+\omega)\,\tau\right] + \\ + \left[\dot{y}_{(0)}\sin(2\Omega+\omega)\,\tau + \frac{\ddot{y}_{(0)}}{2\Omega+\omega}\cos(2\Omega+\omega)\,\tau\right]\times \\ \times\frac{2C_5}{2\Omega+\omega} + C_4^2 + C_5^2\,. \end{aligned} \tag{3.318}$$

Если положить в начальный момент $\ddot{y}_{(0)}=0$, а также константы интегрирования C_4 и C_5 равными нулю, то полученные нами выражения для координат частицы (3.315, 3.316), существенно упростятся

$$x = -\frac{1}{2\Omega+\omega}\,\dot{y}_{(0)}\cos(2\Omega+\omega)\,\tau\,, \tag{3.319}$$

$$y = \frac{1}{2\Omega+\omega}\,\dot{y}_{(0)}\sin(2\Omega+\omega)\,\tau\,. \tag{3.320}$$

Тогда наше уравнение траектории (3.318) принимает вид простого уравнения окружности

$$x^2+y^2 = \frac{\dot{y}_{(0)}^2}{(2\Omega+\omega)^2}\,. \tag{3.321}$$

Таким образом, если начальная скорость заряженной частицы нашего мира относительно оси направления стационарного магнитного поля (оси z) равна нулю, частица движется в плоскости $x\,y$ по *окружности* радиусом

$$r = \frac{\dot{y}_{(0)}}{2\Omega+\omega} = \frac{\dot{y}_{(0)}}{2\Omega+\frac{eH}{mc}}\,, \tag{3.322}$$

зависящим от напряженности поля и скорости вращения пространства. Если начальная скорость частицы в направлении магнитного поля отлична от нуля, ее движение происходит по *винтовой линии* радиусом r вдоль поля.

В общем случае частица описывает в плоскости $x\,y$ эллипс (3.318), форма которого отклоняется от окружности в зависимости от начальных условий движения частицы.

Как легко видеть, наш результат совпадает с результатом из §21

Теории поля

$$x = -\frac{1}{\omega}\,\dot{y}_{(0)}\cos\omega\tau\,, \qquad y = \frac{1}{\omega}\,\dot{y}_{(0)}\sin\omega\tau\,, \tag{3.323}$$

если положить вращение пространства $\Omega = 0$, т.е. в отсутствие поля неголономности. Тогда радиус траектории частицы $r = \frac{\dot{y}_{(0)}}{\omega} = \frac{mc}{eH}\,\dot{y}_{(0)}$ не зависит от скорости вращения пространства. Если $\Omega \neq 0$, поле неголономности пространства возмущает движение частиц в магнитном поле, складываясь с полем магнитной напряженности, что проявляется в уравнениях теории в виде поправки 2Ω к величине $\omega = \frac{eH}{mc}$. Заметим, мы рассмотрели частицы лишь в слабом поле неголономности. В сильном поле неголономности, когда величину Ω нельзя считать пренебрежимо малой по сравнению со скоростью света, эти влияния сказываются еще сильнее.

Вместе с тем в неголономном пространстве аргумент тригонометрических функций в наших уравнениях содержит *сумму двух членов*, один из которых является следствием взаимодействия заряда частицы с напряженностью магнитного поля, а другой — проявлением вращения самого пространства, не зависящим ни от электрического заряда частицы, ни от наличия магнитного поля. Это позволяет рассмотреть два особых случая движения частицы в неголономном пространстве.

В первом случае, когда частица является электрически нейтральной или магнитное поле отсутствует, ее движение будет таким же, как и под действием магнитной составляющей силы Лоренца, только за счет влияния угловой скорости вращения пространства 2Ω, сравнимой с величиной $\omega = \frac{eH}{mc}$.

Насколько это может проявиться в реальной жизни? Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо хотя бы приблизительно оценить отношение величин скорости вращения пространства Ω и напряженности магнитного поля H в каком-то конкретном случае. Лучше всего это сделать на примере атома, т.к. в масштабах электронных орбит электромагнитное взаимодействие на несколько порядков превосходит остальные, и, кроме того, орбитальные скорости электронов сравнительно велики.

Сделать такую оценку нам поможет движение заряженной частицы в однородном стационарном магнитном поле, при условии

$$\frac{eH}{mc} = -2\Omega\,, \tag{3.324}$$

и, следовательно, аргумент тригонометрических функций в уравнениях движения становится равным нулю.

Рассмотрим систему отсчета наблюдателя, пространство отсчета которого связано с атомным ядром. Будем полагать, что электроны движутся по своим орбитальным траекториям вследствие их увлечения вращением пространства ядра. Будем также считать это увлечение полным, т.е. коэффициент увлечения, равным единице и, следовательно, скорость орбитального движения электрона, равной скорости вращения пространства ядра на этой орбите. Тогда для электрона в атоме искомое отношение (в системе СГСЭ и гауссовой) равно

$$\frac{\Omega}{H} = -\frac{e}{2m_e c} = -\frac{4.8\times 10^{-10}}{18.2\times 10^{-28}\; 3.0\times 10^{10}} = \\ = -8.8\times 10^{6}\ \text{см}^{1/2}\,\text{грамм}^{-1/2}, \tag{3.325}$$

где знак "минус" — следствие того, что Ω и H при рассматриваемом соотношении (3.324) направлены в противоположные стороны. Таким образом, поле неголономности пространства ядра является основным фактором, влияющим на движение орбитального электрона, по сравнению с магнитной составляющей связывающей их силы Лоренца.

Теперь перейдем к решению уравнений движения частицы зазеркалья в стационарном однородном магнитном поле (3.305), которые совпадают с уравнениями движения в отсутствии поля неголономности пространства [10]

$$\ddot{x} = -\omega\dot{y}\,, \qquad \ddot{y} = \omega\dot{x}\,, \qquad \ddot{z} = 0\,. \tag{3.326}$$

Решение третьего уравнения движения (вдоль оси z) есть интеграл $z = \dot{z}_{(0)}\tau + z_{(0)}$.

Уравнения движения вдоль осей x и y аналогичны уравнениям для частицы нашего мира, только в аргументе тригонометрических функций вместо ω стоит $\omega + 2\Omega$:

$$\dot{x} = \dot{y}_{(0)}\sin\omega\tau - \frac{\ddot{y}_{(0)}}{\omega}\cos\omega\tau + \dot{x}_{(0)} + \frac{\ddot{y}_{(0)}}{\omega}\,, \tag{3.327}$$

$$\dot{y} = \dot{y}_{(0)}\cos\omega\tau + \frac{\ddot{y}_{(0)}}{\omega}\sin\omega\tau\,. \tag{3.328}$$

Таким образом, выражения для компонент скорости частицы зазеркалья $\dot{x}$ и $\dot{y}$ суть уравнения гармонических колебаний с частотой $\omega = \frac{eH}{mc}$.

Соответственно, их решения, т.е. выражения для координат частицы зазеркалья в стационарном однородном магнитном поле, при-

нимают вид

$$x = \frac{1}{\omega}\left(\frac{\ddot{y}_{(0)}}{\omega}\sin\omega\tau - \dot{y}_{(0)}\cos\omega\tau\right) + \left(\dot{x}_{(0)} + \frac{\ddot{y}_{(0)}}{\omega}\right)\tau + C_4\,, \qquad (3.329)$$

$$y = \frac{1}{\omega}\left(\dot{y}_{(0)}\sin\omega\tau + \frac{\ddot{y}_{(0)}}{\omega}\cos\omega\tau\right) + C_5\,, \qquad (3.330)$$

где константы интегрирования

$$C_4 = x_{(0)} + \frac{\dot{y}_{(0)}}{\omega}\,, \qquad C_5 = y_{(0)} + \frac{\ddot{y}_{(0)}}{\omega^2}\,. \qquad (3.331)$$

Как мы уже упоминали, из интеграла живых сил в стационарном магнитном поле (3.289) следует постоянство релятивистской массы частицы и, следовательно, квадрата ее наблюдаемой скорости. Тогда, возводя в квадрат решения для скоростей $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, частицы зазеркалья и складывая их, получаем, что величина

$$\begin{aligned} \mathrm{v}^2 &= \dot{x}^2_{(0)} + \dot{y}^2_{(0)} + \dot{z}^2_{(0)} + \\ &+ 2\left(\dot{x}_{(0)} + \frac{\ddot{y}_{(0)}}{\omega}\right)\left(\frac{\ddot{y}_{(0)}}{\omega} + \dot{y}_{(0)}\sin\omega\tau - \frac{\ddot{y}_{(0)}}{\omega}\cos\omega\tau\right) \end{aligned} \qquad (3.332)$$

является постоянной $\mathrm{v}^2 = const$, если выполняется условие

$$\dot{x}_{(0)} + \frac{\ddot{y}_{(0)}}{\omega} = 0\,. \qquad (3.333)$$

Из выражения для координаты x (3.329) следует, что частица совершает колебания чисто гармонического типа в направлении x, если выполняется это же условие. С учетом этого, возводя в квадрат и суммируя полученные выражения для координат x (3.329) и y (3.330) частицы зазеркалья в стационарном однородном магнитном поле, получаем уравнение ее траектории в плоскости $x\,y$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \frac{1}{\omega^2}\left(\dot{y}^2_{(0)} + \frac{\ddot{y}^2_{(0)}}{\omega^2}\right) - \frac{2C_4}{\omega}\left(\dot{y}_{(0)}\cos\omega\tau + \frac{\ddot{y}_{(0)}}{\omega}\sin\omega\tau\right) + \\ &+ \left(\dot{y}_{(0)}\sin\omega\tau + \frac{\ddot{y}_{(0)}}{\omega}\cos\omega\tau\right)\frac{2C_5}{\omega} + C_4^2 + C_5^2\,, \end{aligned} \qquad (3.334)$$

отличающееся от траектории частицы нашего мира (3.318) лишь заменой $\omega + 2\Omega$ на ω и значениями констант интегрирования (3.331).

Таким образом, заряженная частица зазеркалья, начальная скорость которой вдоль оси z (направление напряженности магнитного поля) равна нулю, движется по *эллипсу* в плоскости $x\,y$.

Если положить $\ddot{y}_{(0)}$, а также константы C_4 и C_5, равными нулю, решения для координат примут более простой вид

$$x = -\frac{1}{\omega}\,\dot{y}_{(0)}\cos\omega\tau\,, \qquad y = \frac{1}{\omega}\,\dot{y}_{(0)}\sin\omega\tau\,. \tag{3.335}$$

В этом упрощенном случае частица зазеркалья, покоящаяся в направлении поля, описывает в плоскости $x\,y$ *окружность*

$$x^2 + y^2 = \frac{\dot{y}^2_{(0)}}{\omega^2} \tag{3.336}$$

радиусом $r = \frac{\dot{y}_{(0)}}{\omega} = \frac{mc}{eH}\,\dot{y}_{(0)}$. Соответственно, если начальная скорость частицы зазеркалья вдоль напряженности магнитного поля (оси z) не равна нулю, она движется по *винтовой линии* вокруг направления магнитного поля.

Таким образом, движение заряженной частицы зазеркалья в стационарном однородном магнитном поле такое же, как и для частицы нашего мира в отсутствие поля неголономности пространства.

§ 3.12.2 Магнитное поле ортогонально полю неголономности

Рассмотрим случай, когда псевдовектор напряженности магнитного поля H^{*i} ортогонален псевдовектору поля неголономности пространства $\Omega^{*i} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{ikm}A_{km}$. Тогда из первого уравнения 1-й группы уравнений Максвелла для стационарного магнитного поля (3.292) следует, что плотность заряда $\rho = 0$.

Пусть напряженность магнитного поля направлена вдоль оси y (отлична от нуля только компонента $H^{*2} = H$), а поле неголономности по-прежнему направлено вдоль оси z (отлична от нуля только компонента $\Omega^{*3} = \Omega$). Будем считать также, что магнитное поле не только стационарно, но и однородно. В этом случае единственная не равная нулю компонента магнитной напряженности равна

$$H^{*2} = H_{31} = \frac{\varphi}{c}\left(\frac{\partial \mathrm{v}_3}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial z}\right) = const\,. \tag{3.337}$$

Тогда уравнения движения частицы нашего мира при слабом поле неголономности будут иметь вид

$$\ddot{x} + 2\Omega\dot{y} = \frac{eH}{mc}\,\dot{z}\,, \quad \ddot{y} - 2\Omega\dot{x} = 0\,, \quad \ddot{z} = -\frac{eH}{mc}\,\dot{x}\,, \tag{3.338}$$

или, обозначая $\omega = \frac{eH}{mc}$,

$$\ddot{x} + 2\Omega\dot{y} = \omega\dot{z}\,, \qquad \ddot{y} - 2\Omega\dot{x} = 0\,, \qquad \ddot{z} = -\omega\dot{x}\,. \tag{3.339}$$

Продифференцируем первое уравнение по τ и подставим в него $\ddot{y}$ и $\ddot{z}$ из второго и третьего уравнений

$$\dddot{x} + \left(4\Omega^2 + \omega^2\right)\dot{x} = 0\,. \qquad (3.340)$$

Произведя замену переменных $\dot{x} = p$, получаем обычное уравнение колебаний

$$\ddot{p} + \widetilde{\omega}^2 p = 0\,, \qquad \widetilde{\omega} = \sqrt{4\Omega^2 + \omega^2} = \sqrt{4\Omega^2 + \left(\frac{eH}{mc}\right)^2}, \qquad (3.341)$$

решение которого имеет вид

$$p = C_1 \cos\widetilde{\omega}\tau + C_2 \sin\widetilde{\omega}\tau\,, \qquad (3.342)$$

где $C_1 = \dot{x}_{(0)}$ и $C_2 = \frac{\ddot{x}_{(0)}}{\widetilde{\omega}^2}$ константы интегрирования. Интегрируя $\dot{x} = p$ по τ, находим выражение для координаты x

$$x = \frac{\dot{x}_{(0)}}{\widetilde{\omega}} \sin\widetilde{\omega}\tau - \frac{\ddot{x}_{(0)}}{\widetilde{\omega}^2} \cos\widetilde{\omega}\tau + x_{(0)} + \frac{\ddot{x}_{(0)}}{\widetilde{\omega}^2}\,, \qquad (3.343)$$

где $x_{(0)} + \frac{\ddot{x}_{(0)}}{\widetilde{\omega}^2} = C_3$ постоянная интегрирования.

Подставляя $\dot{x} = p$ (3.342) в уравнения движения относительно осей y и z (3.339), после интегрирования получаем

$$\dot{y} = \frac{2\Omega}{\widetilde{\omega}}\, \dot{x}_{(0)} \sin\widetilde{\omega}\tau - \frac{2\Omega}{\widetilde{\omega}^2}\, \ddot{x}_{(0)} \cos\widetilde{\omega}\tau + \dot{y}_{(0)} + \frac{2\Omega}{\widetilde{\omega}^2}\, \ddot{x}_{(0)}\,, \qquad (3.344)$$

$$\dot{z} = \frac{\omega}{\widetilde{\omega}^2}\, \ddot{x}_{(0)} \cos\widetilde{\omega}\tau - \frac{\omega}{\widetilde{\omega}}\, \dot{x}_{(0)} \sin\widetilde{\omega}\tau + \dot{z}_{(0)} - \frac{\omega}{\widetilde{\omega}^2}\, \ddot{x}_{(0)}\,, \qquad (3.345)$$

где $\dot{y}_{(0)} + \frac{2\Omega\ddot{x}_{(0)}}{\widetilde{\omega}^2} = C_4$ и $\dot{z}_{(0)} - \frac{\omega\ddot{x}_{(0)}}{\widetilde{\omega}^2} = C_5$ постоянные интегрирования. Далее, интегрируя это уравнение по τ, находим выражения для координат y и z

$$\begin{aligned} y = -\frac{2\Omega}{\widetilde{\omega}^2}\left(\dot{x}_{(0)} \cos\widetilde{\omega}\tau + \frac{\ddot{x}_{(0)}}{\widetilde{\omega}} \sin\widetilde{\omega}\tau\right) + \dot{y}_{(0)}\tau + \\ + \frac{2\Omega}{\widetilde{\omega}^2}\, \ddot{x}_{(0)}\tau + y_{(0)} + \frac{2\Omega}{\widetilde{\omega}^2}\, \dot{x}_{(0)}\,, \end{aligned} \qquad (3.346)$$

$$\begin{aligned} z = \frac{\omega}{\widetilde{\omega}^2}\left(\dot{x}_{(0)} \cos\widetilde{\omega}\tau + \frac{\ddot{x}_{(0)}}{\widetilde{\omega}} \sin\widetilde{\omega}\tau\right) + \dot{z}_{(0)}\tau - \\ - \frac{\omega}{\widetilde{\omega}^2}\, \ddot{x}_{(0)}\tau + z_{(0)} - \frac{\omega}{\widetilde{\omega}^2}\, \dot{x}_{(0)}\,, \end{aligned} \qquad (3.347)$$

в которых $y_{(0)} + \frac{2\Omega\dot{x}_{(0)}}{\widetilde{\omega}^2} = C_6$ и $z_{(0)} - \frac{\omega\dot{x}_{(0)}}{\widetilde{\omega}^2} = C_7$.

Если $\Omega = 0$, т.е. в отсутствие вращения пространства, а также при равенстве нулю некоторых констант интегрирования, полученные нами уравнения полностью совпадают с известными выражениями релятивистской электродинамики для случая, когда стационарное однородное магнитное поле направлено вдоль оси z

$$x = \frac{\dot{x}_{(0)}}{\omega}\sin\widetilde{\omega}\tau\,, \quad y = y_{(0)} + \dot{y}_{(0)}\tau\,, \quad z = \frac{\dot{x}_{(0)}}{\omega}\cos\widetilde{\omega}\tau\,. \tag{3.348}$$

Так как из интеграла живых сил следует постоянство квадрата наблюдаемой скорости частицы в стационарном магнитном поле, вычислим величину $\mathrm{v}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$. Подставляя найденные выражения для компонент скорости, получаем

$$\begin{gathered}\mathrm{v}^2 = \dot{x}^2_{(0)} + \dot{y}^2_{(0)} + \dot{z}^2_{(0)} + \frac{2}{\widetilde{\omega}}\left(\ddot{x}_{(0)} + 2\Omega\,\dot{y}_{(0)} - \omega\dot{z}_{(0)}\right)\times \\ \times\left(\frac{\ddot{x}_{(0)}}{\widetilde{\omega}} + \dot{x}_{(0)}\sin\widetilde{\omega}\tau - \frac{\ddot{x}_{(0)}}{\widetilde{\omega}}\cos\widetilde{\omega}\tau\right),\end{gathered} \tag{3.349}$$

т.е. $\mathrm{v}^2 = const$ при условии

$$\ddot{x}_{(0)} + 2\Omega\,\dot{y}_{(0)} - \omega\dot{z}_{(0)} = 0\,. \tag{3.350}$$

Уравнение траектории частицы в стационарном однородном магнитном поле, ортогональном полю неголономности, находим, вычисляя $x^2 + y^2 + z^2$. В результате получается довольно сложное выражение

$$\begin{gathered}x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{\widetilde{\omega}^2}\left(\dot{x}^2_{(0)} + \frac{\ddot{x}^2_{(0)}}{\widetilde{\omega}^2}\right) + C_3^2 + C_6^2 + C_7^2 + \\ + \left(C_4^2 + C_5^2\right)\tau^2 + 2\left(C_4C_6 + C_5C_7\right)\tau + \Big[\left(\omega C_7 - 2\Omega C_6\right) + \\ + 2\left(\omega C_5 - 2\Omega C_6\right)\tau\Big]\left(\dot{x}_{(0)}\cos\widetilde{\omega}\tau + \frac{\ddot{x}_{(0)}}{\widetilde{\omega}}\sin\widetilde{\omega}\tau\right)\frac{1}{\widetilde{\omega}^2} + \\ + \frac{2C_3}{\widetilde{\omega}^2}\left(\dot{x}_{(0)}\cos\widetilde{\omega}\tau - \frac{\ddot{x}_{(0)}}{\widetilde{\omega}}\sin\widetilde{\omega}\tau\right),\end{gathered} \tag{3.351}$$

в котором присутствуют линейный и квадратичный (по времени) члены, а также параметрический и два гармонических члена. В частном случае, если положить константы интегрирования равными нулю, полученное выражение (3.351) принимает вид обычного уравнения *сферы*

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{\widetilde{\omega}^2}\left(\dot{x}^2_{(0)} + \frac{\ddot{x}^2_{(0)}}{\widetilde{\omega}^2}\right), \tag{3.352}$$

радиус которой равен

$$r=\frac{1}{\widetilde{\omega}}\sqrt{\dot{x}_{(0)}^{2}+\frac{\ddot{x}_{(0)}^{2}}{\widetilde{\omega}^{2}}}\,, \tag{3.353}$$

где $\widetilde{\omega}=\sqrt{4\Omega^2+\omega^2}=\sqrt{4\Omega^2+\left(\frac{eH}{mc}\right)^2}$.

Таким образом, заряженная частица нашего мира движется в стационарном однородном магнитном поле, ортогональном полю неголономности, по поверхности *сферы* с радиусом, являющимся функцией магнитной напряженности и скорости вращения пространства. В частном случае, когда поле неголономности пространства отсутствует, а начальное ускорение частицы равно нулю, наше уравнение траектории существенно упрощается, принимая вид уравнения сферы

$$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{\omega^2}\,\dot{x}_{(0)}^{2}\,, \qquad r=\frac{1}{\omega}\,\dot{x}_{(0)}=\frac{mc}{eH}\,\dot{x}_{(0)} \tag{3.354}$$

с радиусом, зависящим только от взаимодействия заряда частицы с магнитным полем, — результат, хорошо известный в электродинамике (см. §21 в *Теории поля*). Для частицы зазеркалья, движущейся в стационарном однородном магнитном поле, ортогональном полю неголономности, уравнения движения имеют вид

$$\ddot{x}=\frac{eH}{mc}\,\dot{z}, \qquad \ddot{y}=0, \qquad \ddot{z}=-\frac{eH}{mc}\,\dot{x}\,, \tag{3.355}$$

отличающийся от уравнений движения частицы нашего мира (3.338) лишь отсутствием членов, включающих скорость вращения пространства Ω. На практике это приводит к тому, что в зазеркалье решения уравнений просто не зависят от вращения пространства и совпадают с приведенными решениями для нашего мира в отсутствие поля неголономности.

§ 3.13 Движение заряженной частицы в стационарном электромагнитном поле

В этом параграфе нам предстоит исследовать движение заряженной частицы в том случае, когда одновременно присутствуют электрическая и магнитная составляющие стационарного однородного электромагнитного поля. В качестве “фона” мы рассмотрим неголономное пространство, вращающееся относительно оси z с постоянной угловой скоростью $\Omega_{12}=-\Omega_{21}=\Omega$, т.е. пространство с метрикой вида (3.275). В пространстве с такой метрикой мы имеем $F_i=0$ и $D_{ik}=0$.

При этом будем решать задачу в приближении, что поле неголономности является *слабым*, следовательно, трехмерное наблюдаемое пространство имеем евклидову метрику. В этом случае уравнения Максвелла для стационарного поля (3.215, 3.216) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} &\Omega_{*m}H^{*m} = -2\pi c\rho \\ &\varepsilon^{ikm}\,\nabla_k\big(H_{*m}\sqrt{h}\big) = \frac{4\pi}{c}\,j^i\sqrt{h} = 0 \end{aligned}\right\}\ \mathrm{I}\,, \tag{3.356}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Omega_{*m}E^{m} = 0 \\ &\varepsilon^{ikm}\,\nabla_k\big(E_{m}\sqrt{h}\big) = 0 \end{aligned}\right\}\ \mathrm{II}\,, \tag{3.357}$$

т.к. условием наблюдаемой однородности поля является равенство нулю его хронометрически инвариантной производной [9], а в рассматриваемом конкретном случае хронометрически инвариантные символы Кристоффеля равны нулю (метрика является галилеевой) и хронометрически инвариантная производная совпадает с обычной производной. Таким образом, из уравнений Максвелла следует, что, в данном случае, выполняются следующие условия:

1) поле неголономности и электрическое поле взаимно ортогональны ($\Omega_{*m}E^m\!=\!0$);
2) поле неголономности и магнитное поле взаимно ортогональны, если плотность зарядов $\rho\!=\!0$;
3) ток отсутствует ($j^i\!=\!0$).

Последнее условие свидетельствует, что присутствие тока $j^i\neq 0$ является следствием неоднородности магнитного поля. Итак, поскольку поле неголономности ортогонально электрическому полю, можно рассматривать движение частицы при двух случаях взаимной ориентации полей

1) $\vec{H}\perp\vec{E}$ и $\vec{H}\parallel\vec{\Omega}$;
2) $\vec{H}\parallel\vec{E}$ и $\vec{H}\perp\vec{\Omega}$.

В обоих случаях условимся: вектор электрической напряженности направлен вдоль оси x. При используемой фоновой метрике(3.275) псевдовектор направлен вдоль оси z. Таким образом, в первом случае магнитная напряженность направлена вдоль оси z, во втором случае — вдоль оси x.

Уравнения движения заряженной частицы в стационарном электромагнитном поле в случае, когда вектор электрической напряженности направлен вдоль оси x, имеют следующий вид. При движении

частицы нашего мира

$$\frac{dm}{d\tau} = -\frac{eE_1}{c^2}\frac{dx}{d\tau}\,, \tag{3.358}$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(m\mathrm{v}^i\right) + 2mA_{k\cdot}^{\cdot i}\mathrm{v}^k = -\,e\left(E^i + \frac{1}{c}\,\varepsilon^{ikm}\mathrm{v}_k H_{*m}\right), \tag{3.359}$$

при движении частицы зазеркалья

$$\frac{dm}{d\tau} = \frac{eE_1}{c^2}\frac{dx}{d\tau}\,, \tag{3.360}$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(m\mathrm{v}^i\right) = -\,e\left(E^i + \frac{1}{c}\,\varepsilon^{ikm}\mathrm{v}_k H_{*m}\right). \tag{3.361}$$

Как и раньше, рассмотрим случай *отталкивания* частицы полем. Тогда компоненты напряженности электрического поля E_i, направленной вдоль оси x, равны (в галилеевой системе отсчета нет разницы между контравариантными и ковариантными индексами тензорных величин)

$$E_1 = E_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = const = -E\,, \qquad E_2 = E_3 = 0\,. \tag{3.362}$$

Интегрирование теоремы живых сил дает интеграл живых сил для нашего мира и для зазеркалья (соответственно)

$$m = \frac{eE}{c^2}x + B\,, \qquad m = -\frac{eE}{c^2}x + \widetilde{B}\,. \tag{3.363}$$

Здесь B константа интегрирования в нашем мире и $\widetilde{B}$ константа интегрирования в зазеркалье, вычисляемые из начальных условий в момент $\tau = 0$, составляют

$$B = m_{(0)} - \frac{eE}{c^2}\,x_{(0)}\,, \qquad \widetilde{B} = m_{(0)} + \frac{eE}{c^2}\,x_{(0)}\,, \tag{3.364}$$

где $m_{(0)}$ значение релятивистской массы и $x_{(0)}$ смещение частицы в начальный момент. Из полученных интегралов живых сил (3.363) следует: различия исследуемых случаев, вызванные разной ориентацией магнитной напряженности $\vec{H}$, проявятся лишь в векторных уравнениях движения, а скалярные уравнения (3.358, 3.360) и их решения (3.363) будут одинаковыми.

Отметим, что вектор $\vec{E}$ можно направить и вдоль оси y, но нельзя по оси z, т.к. в пространстве с данной метрикой вдоль оси z направлено поле неголономности $\vec{\Omega}$, а из 2-й группы уравнений Максвелла (3.357) следует, что напряженность $\vec{E}$ ортогональна полю $\vec{\Omega}$.

Теперь, учитывая результаты интегрирования теоремы живых сил в нашем мире и в зазеркалье (3.363), запишем в покомпонентном виде векторные (пространственные) уравнения движения частицы в в стационарном однородном электрическом и магнитном полях для всех рассматриваемых случаев.

Случай 1. Пусть $\vec{H} \perp \vec{E}$ и $\vec{H} \parallel \vec{\Omega}$, т.е. магнитная напряженность $\vec{H}$ направлена вдоль оси z (параллельно полю неголономности).

тогда из всех компонент напряженности магнитного поля не равной нулю является лишь компонента

$$H^{*3} = H_{12} = \frac{\varphi}{c}\left(\frac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial x}\right) + \frac{2\varphi}{c} A_{12} = const = H\,. \qquad (3.365)$$

Соответственно, векторные уравнения движения принимают вид (покомпонентно) для частицы нашего мира

$$\left.\begin{aligned} &\frac{eE}{c^2}\,\dot{x}^2 + \left(B + \frac{eE}{c^2}\,x\right)(\ddot{x} + 2\Omega\dot{y}) = eE - \frac{eH}{c}\,\dot{y} \\ &\frac{eE}{c^2}\,\dot{x}\dot{y} + \left(B + \frac{eE}{c^2}\,x\right)(\ddot{y} - 2\Omega\dot{x}) = \frac{eH}{c}\,\dot{x} \\ &\frac{eE}{c^2}\,\dot{x}\dot{z} + \left(B + \frac{eE}{c^2}\,x\right)\ddot{z} = 0 \end{aligned}\right\}, \qquad (3.366)$$

и частицы зазеркалья

$$\left.\begin{aligned} &\frac{eE}{c^2}\,\dot{x}^2 + \left(\widetilde{B} - \frac{eE}{c^2}\,x\right)\ddot{x} = eE - \frac{eH}{c}\,\dot{y} \\ &\frac{eE}{c^2}\,\dot{x}\dot{y} + \left(\widetilde{B} - \frac{eE}{c^2}\,x\right)\ddot{y} = \frac{eH}{c}\,\dot{x} \\ &\frac{eE}{c^2}\,\dot{x}\dot{z} + \left(\widetilde{B} - \frac{eE}{c^2}\,x\right)\ddot{z} = 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (3.367)$$

Кроме того, из 1-й группы уравнений Максвелла (3.356) следует, что в расматриваемом случае, когда магнитное поле и поле неголономности параллельны, имеет место условие

$$\Omega_{*3} H^{*3} = -2\pi c\rho\,, \qquad (3.368)$$

где $\Omega_{*3} = \Omega = const$ и $H^{*3} = H = const$. Таким образом, данная взаимная ориентация поля неголономности и магнитного поля возможна только в том случае, когда плотность электрического заряда, как источника поля, $\rho \neq 0$.

Случай 2. $\vec{H} \parallel \vec{E}$, $\vec{H} \perp \vec{\Omega}$, и $\vec{E} \perp \vec{\Omega}$, т.е. магнитная и электрическая напряженности направлены вдоль оси x, а поле неголономности по-прежнему вдоль оси z.

В этом случае из всех компонент напряженности магнитного поля не равна нулю только первая компонента

$$H^{*1} = H_{23} = \frac{\varphi}{c}\left(\frac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{v}_3}{\partial y}\right) = const = H\,, \tag{3.369}$$

а векторные уравнения движения принимают вид (покомпонентно) для частицы нашего мира

$$\left.\begin{aligned} &\frac{eE}{c^2}\,\dot{x}^2 + \left(B + \frac{eE}{c^2}\,x\right)(\ddot{x} + 2\Omega\dot{y}) = eE \\ &\frac{eE}{c^2}\,\dot{x}\dot{y} + \left(B + \frac{eE}{c^2}\,x\right)(\ddot{y} - 2\Omega\dot{x}) = -\frac{eH}{c}\,\dot{z} \\ &\frac{eE}{c^2}\,\dot{x}\dot{z} + \left(B + \frac{eE}{c^2}\,x\right)\ddot{z} = \frac{eH}{c}\,\dot{y} \end{aligned}\right\} \tag{3.370}$$

и для частицы зазеркалья

$$\left.\begin{aligned} &\frac{eE}{c^2}\,\dot{x}^2 + \left(\widetilde{B} - \frac{eE}{c^2}\,x\right)\ddot{x} = eE \\ &\frac{eE}{c^2}\,\dot{x}\dot{y} + \left(\widetilde{B} - \frac{eE}{c^2}\,x\right)\ddot{y} = -\frac{eH}{c}\,\dot{z} \\ &\frac{eE}{c^2}\,\dot{x}\dot{z} + \left(\widetilde{B} - \frac{eE}{c^2}\,x\right)\ddot{z} = \frac{eH}{c}\,\dot{y} \end{aligned}\right\}. \tag{3.371}$$

Теперь, когда мы выписали уравнения движения заряженной частицы для всех случаев взаимной ориентации электрического поля, магнитного поля и поля неголономности, приступим к их решению.

§ 3.13.1 Магнитное поле ортогонально электрическому полю и параллельно полю неголономности пространства

Будем решать векторные уравнения движения заряженной частицы (3.366, 3.367), полагая абсолютную величину ее наблюдаемой скорости малой по сравнению со скоростью света. Тогда можно считать массу частицы в начальный момент, равной ее массе покоя

$$m_{(0)} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}} \cong m_0\,. \tag{3.372}$$

Положим также, что величина напряженности электрического поля E тоже мала, так что член $\frac{eEx}{c^2}$ стремится к нулю и, следовательно, им можно пренебречь. В этом случае векторные уравнения движения заряженной частицы примут следующий вид. Для частицы нашего мира

$$m_0\,(\ddot{x}+2\Omega\dot{y}) = eE-\frac{eH}{c}\,\dot{y}\,,\;\; m_0\,(\ddot{y}-2\Omega\dot{x}) = \frac{eH}{c}\,\dot{x}\,,\;\; m_0\ddot{z}=0\,, \tag{3.373}$$

для частицы зазеркалья

$$m_0\ddot{x} = eE - \frac{eH}{c}\,\dot{y}\,, \qquad m_0\ddot{y} = \frac{eH}{c}\,\dot{x}\,, \qquad m_0\ddot{z} = 0\,. \tag{3.374}$$

Эти уравнения совпадают с уравнениями, выведенными при решении аналогичной задачи в §22 *Теории поля*, если поле вращения пространства $\Omega=0$ и напряженность электрического поля направлена вдоль оси x.

Полученные уравнения для частицы зазеркалья суть частный случай уравнений для нашего мира при $\Omega=0$. Поэтому достаточно проинтегрировать уравнения в нашем мире, а их решения в зазеркалье получаются автоматически, если положить поле неголономности пространства $\Omega=0$. Интегрируя уравнения движения вдоль оси z получаем

$$z = \dot{z}_{(0)}\tau + z_{(0)}\,. \tag{3.375}$$

Интегрируя второе уравнение (вдоль оси y) имеем

$$\dot{y} = \left(2\Omega + \frac{eH}{m_0 c}\right)x + C_1\,, \tag{3.376}$$

где константа интегрирования $C_1=\dot{y}_{(0)} - \bigl(2\Omega + \frac{eH}{m_0 c}\bigr)\,x_{(0)}$.

Подставляя $\dot{y}$ в первое уравнения (3.373), получаем дифференциальное уравнение 2-го порядка относительно x

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{eE}{m_0} + \omega^2 x_{(0)} - \omega\dot{y}_{(0)}\,, \tag{3.377}$$

где $\omega=2\Omega + \frac{eH}{m_0 c}$. Вводя новую переменную

$$u = x - \frac{A}{\omega^2}\,, \qquad A = \frac{eE}{m_0} + \omega^2 x_{(0)} - \omega\dot{y}_{(0)}\,, \tag{3.378}$$

получаем уравнение гармонических колебаний

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0\,, \tag{3.379}$$

решение которого имеет вид

$$u = C_2\cos\omega\tau + C_3\sin\omega\tau\,, \tag{3.380}$$

где константы интегрирования $C_2 = u_{(0)}$, $C_3 = \frac{\dot{u}_{(0)}}{\omega}$.

Возвращаясь к переменной x путем обратной подстановки переменных (т.е. в обратной последовательности по отношению к тому, как мы делали только что), получаем окончательное выражение для искомой координаты x

$$x = \frac{1}{\omega}\left(\dot{y}_{(0)} - \frac{eE}{m_0\omega}\right)\cos\omega\tau + \frac{\dot{x}_{(0)}}{\omega}\sin\omega\tau + \frac{eE}{m_0\omega^2} + x_{(0)} - \frac{\dot{y}_{(0)}}{\omega}\,. \quad (3.381)$$

Подставляя это выражение в полученное уравнение для $\dot{y}$ (3.376), после интегрирования получаем выражение для координаты y

$$y = \frac{1}{\omega}\left(\dot{y}_{(0)} - \frac{eE}{m_0\omega}\right)\sin\omega\tau - \frac{\dot{x}_{(0)}}{\omega}\cos\omega\tau + \frac{eE}{m_0\omega^2} + y_{(0)} + \frac{\dot{x}_{(0)}}{\omega}\,. \quad (3.382)$$

Решения векторных уравнений движения в зазеркалье имеют точно такой же вид, но, т.к. в этом случае $\Omega = 0$, частота равна $\omega = \frac{eH}{m_0 c}$.

Энергия частицы нашего мира и частицы зазеркалья, соответственно, имеет вид $E = mc^2$ и $E = -mc^2$.

Трехмерный импульс заряженной частицы нашего мира в стационарном однородном электромагнитном поле (когда магнитное поле ортогонально к электрическому полю и параллельно полю неголономности) составляет

$$\left.\begin{aligned}
&p^1 = m_0\dot{x} = \left(\frac{eE}{\omega} - m_0\dot{y}_{(0)}\right)\sin\omega\tau + m_0\dot{x}_{(0)}\cos\omega\tau\\
&p^2 = m_0\dot{y} = \left(\frac{2\Omega m_0}{\omega} + \frac{eH}{\omega c}\right)\left(\frac{eE}{m_0\omega} - \dot{y}_{(0)}\right) + m_0\dot{y}_{(0)} + \\
&\quad + \left(\frac{2\Omega m_0}{\omega} + \frac{eH}{\omega c}\right)\left[\left(\dot{y}_{(0)} - \frac{eE}{m_0\omega}\right)\cos\omega\tau + \dot{x}_{(0)}\sin\omega\tau\right]\\
&p^3 = m_0\dot{z} = m_0\dot{z}_{(0)}
\end{aligned}\right\}. \quad (3.383)$$

Отсюда видно: импульс заряженной частицы нашего мира в рассматриваемой конфигурации полей испытывает гармонические колебания в направлениях x и y, а в направлении z является линейной функцией от наблюдаемого времени τ (в случае, когда начальная скорость $\dot{z} \neq 0$).

Соответственно, в плоскости xy частота данных колебаний равна $\omega = 2\Omega + \frac{eH}{m_0 c}$.

В зазеркалье при рассматриваемой конфигурации электрического поля, магнитного поля и поля неголономности трехмерный им-

пульс заряженной частицы равен

$$\left.\begin{aligned} p^1 &= \left(\frac{eE}{\omega} - m_0\dot{y}_{(0)}\right)\sin\omega\tau + m_0\dot{x}_{(0)}\cos\omega\tau \\ p^2 &= \frac{eE}{\omega} + m_0\left[\left(\dot{y}_{(0)} - \frac{eE}{m_0\omega}\right)\cos\omega\tau + \dot{x}_{(0)}\sin\omega\tau\right] \\ p^3 &= m_0\dot{z}_{(0)} \end{aligned}\right\}, \qquad (3.384)$$

где, в отличии от нашего мира, $\omega = \frac{eH}{m_0c}$.

В заключение надо отметить, что получить точные решения уравнений движения заряженной частицы одновременно в электрическом и магнитных полях в общем виде весьма проблематично, т.к. в процессе решения там появляются эллиптические интегралы. Возможно, в будущем, при особом желании или практической необходимости, их все-таки удастся решить в общем виде на машинах, но в нашу задачу это не входит. Видимо, с такой же проблемой столкнулись Ландау и Лифшиц, т.к. в §22 *Теории поля*, рассматривая аналогичную задачу (но, в отличии от данной книги, общековариантными методами и без учета поля неголономности пространства), они составляли уравнения движения и получали их решения, полагая скорость движения частицы нерелятивистской и электрическое поле слабым $\frac{eEx}{c^2} \approx 0$.

§ 3.13.2 Магнитное поле параллельно электрическому полю и ортогонально полю неголономности пространства

Будем решать векторные уравнения движения заряженной частицы (3.370, 3.371) в том же приближении, что и в первом случае. Тогда они примут вид для нашего мира

$$\ddot{x} + 2\Omega\dot{y} = \frac{eE}{m_0}\,, \quad \ddot{y} - 2\Omega\dot{x} = -\frac{eH}{m_0c}\,\dot{z}\,, \quad \ddot{z} = \frac{eH}{m_0c}\,\dot{y} \qquad (3.385)$$

и для зазеркалья

$$\ddot{x} = \frac{eE}{m_0}\,, \qquad \ddot{y} = -\frac{eH}{m_0c}\,\dot{z}\,, \qquad \ddot{z} = \frac{eH}{m_0c}\,\dot{y}\,. \qquad (3.386)$$

Интегрируя первое уравнение движения (вдоль оси x) в нашем мире (3.385), получаем

$$\dot{x} = \frac{eE}{m_0}\,\tau - 2\Omega y + C_1\,, \qquad C_1 = const = \dot{x}_{(0)} + 2\Omega y_{(0)}\,. \qquad (3.387)$$

Интегрируя третье уравнение (вдоль оси z), имеем

$$\dot{z} = \frac{eH}{m_0 c}\, y + C_2\,, \qquad C_2 = const = \dot{z}_{(0)} - \frac{eH}{m_0 c}\, y_{(0)}\,. \tag{3.388}$$

Подставляя полученные выражения для $\dot{x}$ и $\dot{z}$ во второе уравнение движения (3.385), получаем линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка относительно y

$$\ddot{y} + \left(4\Omega^2 + \frac{e^2 H^2}{m_0^2 c^2}\right) y = \frac{2\Omega e E}{m_0}\,\tau + 2\Omega C_1 - \frac{eH}{m_0 c}\, C_2\,. \tag{3.389}$$

Будем решать его методом замены переменных. Вводя новую переменную u

$$u = y + \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{eH}{m_0 c}\, C_2 - 2\Omega C_1\right), \qquad \omega^2 = 4\Omega^2 + \frac{e^2 H^2}{m_0^2 c^2}\,, \tag{3.390}$$

получаем уравнение вынужденных колебаний

$$\ddot{u} + \omega^2 u = \frac{2\Omega e E}{m_0}\,\tau\,, \tag{3.391}$$

решение которого есть сумма общего решения уравнения свободных колебаний

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0 \tag{3.392}$$

и частного решения неоднородного уравнения, которое можно записать в следующем виде

$$\tilde{u} = M\tau + N\,, \tag{3.393}$$

где $M = const$ и $N = const$. Дифференцируя $\tilde{u}$ дважды по τ и подставляя результаты в неоднородное уравнение (3.391), приравнивая получившиеся коэффициенты при τ, находим линейные коэффициенты

$$M = \frac{2\Omega e E}{m_0 \omega^2}\,, \qquad N = 0\,. \tag{3.394}$$

Тогда общее решение исходного неоднородного уравнения (3.391) примет следующий вид

$$u = C_3 \cos\omega\tau + C_4 \sin\omega\tau + \frac{2\Omega e E}{m_0 \omega^2}\,\tau\,, \tag{3.395}$$

где постоянные интегрирования вычисляем, подставляя в полученное выражение начальные условия в момент $\tau = 0$. В результате получаем $C_3 = u_{(0)}$ и $C_4 = \frac{\dot{u}_{(0)}}{\omega}$.

Возвращаясь к старой переменной y (3.390), получаем окончательное решение для этой координаты

$$y = \left[y_{(0)} + \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{eH}{m_0 c} C_2 + 2\Omega C_1 \right) \right] \cos\omega\tau + \\ + \frac{\dot{y}_{(0)}}{\omega} \sin\omega\tau - \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{eH}{m_0 c} C_2 + 2\Omega C_1 \right) + \frac{2\Omega eE}{m_0 \omega^2} \tau \,. \tag{3.396}$$

Затем, подставив это выражение в уравнения для $\dot{x}$ и $\dot{z}$, после интегрирования получаем решения для x и z

$$x = \frac{eE}{2m_0} \left(1 - \frac{4\Omega^2}{\omega^2} \right) \tau^2 - \frac{2\Omega}{\omega} \left(y_{(0)} + A \right) \sin\omega\tau + \\ + \frac{2\Omega \dot{y}_{(0)}}{\omega} \cos\omega\tau + (C_1 + 2\Omega A)\,\tau + C_5 \,, \tag{3.397}$$

$$z = \frac{eH}{m_0 c\,\omega} \left[\left(y_{(0)} + A \right) \sin\omega\tau - \frac{\dot{y}_{(0)}}{\omega} \cos\omega\tau \right] - \\ - \left(\frac{eH}{m_0 c} A - C_2 \right) \tau + C_6 \,, \tag{3.398}$$

где для сокращения записи мы обозначаем

$$A = \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{eH}{m_0 c} C_2 - 2\Omega C_1 \right), \tag{3.399}$$

а новые постоянные интегрирования равны

$$C_5 = x_0 - \frac{2\Omega \dot{y}_{(0)}}{\omega} \,, \qquad C_6 = z_{(0)} + \frac{eH \dot{y}_{(0)}}{m_0 c\,\omega^2} \,. \tag{3.400}$$

Если положить $\Omega = 0$, то из координат заряженной частицы нашего мира (3.396–3.398) мы автоматически получим решения для координат заряженной частицы в зазеркалье

$$x = \frac{eE}{2m_0} \tau^2 + \dot{x}_{(0)}\tau + x_{(0)} \,, \tag{3.401}$$

$$y = \frac{\dot{z}_{(0)}}{\omega} \cos\omega\tau + \frac{\dot{y}_{(0)}}{\omega} \sin\omega\tau - \frac{\dot{z}_{(0)}}{\omega} + y_{(0)} \,, \tag{3.402}$$

$$z = \frac{\dot{z}_{(0)}}{\omega} \sin\omega\tau - \frac{\dot{y}_{(0)}}{\omega} \cos\omega\tau + \frac{\dot{y}_{(0)}}{\omega} + z_{(0)} \,. \tag{3.403}$$

Соответственно, компоненты трехмерного импульса заряженной частицы нашего мира в стационарном однородном электромагнит-

ном поле (когда магнитное поле параллельно электрическому и ортогонально к полю неголономности пространства) составляют

$$\left.\begin{aligned} & p^1 = m_0\dot{x}_{(0)} + eE\left(1-\frac{4\Omega^2}{\omega^2}\right)\tau - \\ & -2m_0\Omega\left[\frac{\dot{y}_{(0)}}{\omega}\sin\omega\tau + \left(y_{(0)}+A\right)\cos\omega\tau - \frac{\dot{y}_{(0)}}{\omega} - A\right] \\ & p^2 = m_0\Big[\,\dot{y}_{(0)}\cos\omega\tau - \omega\left(y_{(0)}+A\right)\sin\omega\tau\,\Big] + \frac{2\Omega eE}{\omega^2} \\ & p^3 = m_0\dot{z}_{(0)} + \\ & +\frac{eH}{c}\left[\left(y_{(0)}+A\right)\cos\omega\tau + \frac{\dot{y}_{(0)}}{\omega}\sin\omega\tau - A + \frac{2\Omega eE}{m_0\omega^2}\tau - y_{(0)}\right] \end{aligned}\right\}, \qquad (3.404)$$

где частота $\omega = \sqrt{4\Omega^2 + \frac{e^2H^2}{m_0^2 c}}$. В зазеркалье, при данной конфигурации электрического поля, магнитного поля и поля неголономности, компоненты трехмерного импульса заряженной частицы

$$\left.\begin{aligned} & p^1 = m_0\dot{x}_{(0)} + 2eE\tau \\ & p^2 = m_0\left(\dot{y}_{(0)}\cos\omega\tau - \dot{z}_{(0)}\sin\omega\tau\right) \\ & p^3 = m_0\left(\dot{z}_{(0)}\cos\omega\tau - \dot{y}_{(0)}\sin\omega\tau\right) \end{aligned}\right\}, \qquad (3.405)$$

где, в отличие от нашего мира, частота $\omega = \frac{eH}{m_{(0)}c}$.

§ 3.14 Заключение

Фактически, теорию, построенную в этой главе, можно наиболее точно назвать *хронометрически инвариантным представлением электродинамики в псевдоримановом пространстве*. Или, т.к. математический аппарат физических наблюдаемых величин подразумевает в своей основе псевдориманово пространство, просто — *хронометрически инвариантной электродинамикой* (ХЭД). Здесь мы привели лишь основы этой дисциплины:

- хронометрически инвариантные компоненты тензора электромагнитного поля (тензора Максвелла);
- хронометрически инвариантные уравнения Максвелла;
- закон сохранения электрического заряда в хронометрически инвариантной форме;
- хронометрически инвариантное условие Лоренца;

- хронометрически инвариантные уравнения Даламбера (уравнения распространения волн) для скалярного потенциала и вектор-потенциала электромагнитного поля;
- хронометрически инвариантную силу Лоренца;
- тензор энергии- импульса электромагнитного поля и его хронометрически инвариантные компоненты;
- хронометрически инвариантные уравнения движения массовой заряженной частице;
- геометрическую структуру четырехмерного потенциала электромагнитного поля.

Сам предмет хронометрически инвариантной электродинамики в псевдоримановом пространстве, безусловно, куда более обширен. В дополнение к сделанному можно, например, вывести хронометрически инвариантные уравнения движения заряда, распределенного в пространстве, можно рассмотреть движение частицы, обладающей собственным электромагнитным излучением, взаимодействующим с полем, можно получить уравнения движения для частицы, движущейся под произвольным углом к полю (как для отдельной частицы, так и в случае распределеного заряда), и многое другое. Кроме того, естественно, здесь речь идет о неквантовой электродинамике. Как известно, математический аппарат хронометрических инвариантов создан для четырехмерного псевдориманова пространства. В пространстве с другой геометрией операторы для формального определения физических наблюдаемых величин, естественно, также будут другими. Тем не менее, создание математических методов для определения физических наблюдаемых величин в пространстве квантовой механики и квантовой электродинамики в принципе также возможно.

Глава 4 Частица со спином в псевдоримановом пространстве

§4.1 Постановка задачи

В этой главе нам предстоит вывести динамические уравнения движения для частицы с внутренним механическим моментом (*спином*). Эти уравнения, как мы уже упоминали в 1-й главе, представляют собой уравнения параллельного переноса четырехмерного динамического вектора частицы Q^{α}, представляющего собой сумму векторов

$$Q^{\alpha} = P^{\alpha} + S^{\alpha}, \tag{4.1}$$

где $P^{\alpha} = m_0 \frac{dx^{\alpha}}{ds}$ четырехмерный вектор импульса частицы и S^{α} четырехмерный импульс, приобретаемый частицей за счет внутреннего момента (спина), который делает ее движение негеодезическим. Поэтому мы будем называть величину S^{α} четырехмерным *спин-импульсом* частицы. Причем, т.к. компоненты динамического вектора частицы P^{α} известны, для определения суммарного динамического вектора частицы Q^{α} нам необходимо получить только компоненты спин-импульса S^{α}, являющиеся некоторыми функциями спина самой частицы. Таким образом, первым этапом наших действий должно стать определение собственно спина частицы как геометрической величины в четырехмерном псевдоримановом пространстве. Затем, во втором параграфе этой главы, мы вычислим четырехмерный импульс S^{α}, приобретаемый движущейся частицей за счет своего спина. В третьем параграфе нам предстоит вывести собственно динамические уравнения движения частицы со спином в псевдоримановом пространстве и их хронометрически инвариантные (физические наблюдаемые) проекции на время и на пространство. Остальные параграфы будут посвящены движению элементарных частиц. Итак, абсолютная величина спина частицы есть величина $\pm n\hbar$, измеряемая в долях постоянной Планка, где n так называемое *спиновое квантовое число*. На сегодняшний день известно, что для разных типов частиц это число принимает значения

$n = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$. Причем знакопеременность $\pm$ означает возможность правого или левого направления внутреннего вращения частицы. Кроме того, постоянная Планка имеет размерность момента импульса $\hbar = [\,\text{грамм см}^2/\,\text{сек}\,]$. Уже только это свидетельствует о том, что спин частицы по своей геометрической структуре должен быть аналогичен тензору момента импульса, т.е. представлять собой антисимметричный тензор 2-го ранга. Посмотрим, подтверждают ли это другие источники. Согласно второму постулату Бора: "На длине круговой орбиты электрона умещается *целое* число волн де Бройля, соответствующее электрону в рамках концепции частица-волна". Иначе говоря, длина орбиты электрона $2\pi r$ равна k длинам волн де Бройля $\lambda = \frac{h}{p}$

$$2\pi r = k\lambda = k\,\frac{h}{p}\,, \tag{4.2}$$

где p величина орбитального импульса электрона. Учитывая, что постоянная Планка равна $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, равенство (4.2) принимает вид

$$rp = k\hbar\,. \tag{4.3}$$

Так как радиус-вектор орбиты электрона r^i ортогонален вектору его орбитального импульса p^k, данное выражение в тензороной записи есть векторное произведение

$$\left[\,r^i; p^k\right] = k\hbar^{ik}\,. \tag{4.4}$$

Отсюда видно, что постоянная Планка, вычисленная из второго постулата Бора в тензорном виде, предстает в виде антисимметричного тензора 2-го ранга. Однако такое представление о постоянной Планка связано с представлением об орбитальной структуре атома — системы более сложной, чем электрон или другие элементарные частицы. Тем не менее, спин, также определяемый этой постоянной, является внутренним свойством самих элементарных частиц. Поэтому, параллельно со вторым постулатом Бора, необходимо рассмотреть геометрическую структуру постоянной Планка, исходя из какого-либо другого экспериментального соотношения, касающегося исключительно внутреннего строения самого электрона. Такую возможность нам дают известные опыты Отто Штерна и Вальтера Герлаха (1922). Одним из результатов этих опытов является вывод о том, что электрон обладает внутренним магнитным моментом L_{m}, который пропорционален его внутреннему механическому моменту (спину)

$$\frac{m_{\mathrm{e}}}{e}\,L_{\mathrm{m}} = n\hbar\,, \tag{4.5}$$

где e заряд электрона, $m_{\rm e}$ его масса и n спиновое квантовое число (для электрона $n=\frac{1}{2}$). Магнитный момент контура площадью $S=\pi r^2$, по которому течет ток I, равен $L_{\rm m}=IS$. Сила тока равна заряду e, деленному на период его циркуляции $T=\frac{2\pi r}{u}$ по данному контуру

$$I = \frac{eu}{2\pi r}\,, \tag{4.6}$$

где u величина скорости циркуляции заряда. Таким образом, внутренний магнитный момент электрона равен

$$L_{\rm m} = \frac{1}{2}\, eur\,, \tag{4.7}$$

или в тензорном виде*

$$L_{\rm m}^{ik} = \frac{1}{2}\, e\left[\, r^i; u^k\,\right] = \frac{1}{2}\left[\, r^i; p_{\rm m}^k\,\right]\,, \tag{4.8}$$

где r^i радиус-вектор циркуляции внутреннего тока электрона и u^k вектор скорости этой циркуляции. Отсюда видно, что постоянная Планка, вычисленная через внутренний магнитный момент электрона (4.5), также представляет собой векторное произведение двух векторов, т.е. антисимметричный тензор 2-го ранга

$$\frac{m_{\rm e}}{2e}\left[\, r^i; p_{\rm m}^k\,\right] = n\hbar^{ik}, \tag{4.9}$$

что подтверждает аналогичный вывод, сделанный нами из второго постулата Бора. Соответственно, рассматривая внутриатомные и внутриэлектронные квантовые соотношения в четырехмерном псевдоримановом пространстве, мы получаем четырехмерный антисимметричный тензор Планка $\hbar^{\alpha\beta}$, пространственными компонентами которого являются трехмерные величины $\hbar^{ik}$

$$\hbar^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \hbar^{00} & \hbar^{01} & \hbar^{02} & \hbar^{03} \\ \hbar^{10} & \hbar^{11} & \hbar^{12} & \hbar^{13} \\ \hbar^{20} & \hbar^{21} & \hbar^{22} & \hbar^{23} \\ \hbar^{30} & \hbar^{31} & \hbar^{32} & \hbar^{33} \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

Данному антисимметричному тензору $\hbar^{\alpha\beta}$ соответствует *дуальный псевдотензор Планка* $\hbar^{*\alpha\beta}=\frac{1}{2}E^{\alpha\beta\mu\nu}\hbar_{\mu\nu}$. Соответственно, спин

*Выражения (4.8, 4.9) записаны в пространстве Минковского, что вполне применимо для описания упомянутых опытов. В римановом пространстве результат интегрирования зависит от пути интегрирования. Поэтому радиус-вектор, т.к. он зависит от непрерывно меняющегося направления, в римановом пространстве не определен.

частицы в четырехмерном псевдоримановом пространстве характеризуется антисимметричным тензором $n\hbar^{\alpha\beta}$, или дуальным ему псевдотензором $n\hbar^{*\alpha\beta}$. Причем, здесь совершенно не имеет значения физическая природа спина, достаточно лишь, что это фундаментальное внутреннее свойство частицы характеризуется тензором (или псевдотензором) данного вида. Такой подход позволяет нам решать задачу о движении частиц со спином без каких-либо предварительных предположений об их внутреннем строении, т.е. чисто формальным математическим методом.

Итак, с геометрической точки зрения постоянная Планка есть антисимметричный тензор 2-го ранга с размерностью момента импульса независимо от того, через какие величины его получили: механические или электромагнитные. Последнее также означает, что тензор Планка характеризуется не просто вращением внутриатомных масс или каких-то масс внутри элементарных частиц, а является проявлением некоторого фундаментального квантового вращения самого пространства (природа которого остается не до конца ясной вплоть до сегодняшнего дня), устанавливающего все "элементарные" вращения в пространстве независимо от их физической природы.

Собственное вращение пространства характеризуется трехмерным хронометрически инвариантным (наблюдаемым) тензором A_{ik} (1.36), который представляет собой результат опускания индексов $A_{ik}=h_{im}h_{kn}A^{mn}$ у компонент A^{mn} четырехмерного контравариантного тензора

$$A^{\alpha\beta}=ch^{\alpha\mu}h^{\beta\nu}a_{\mu\nu}\,,\qquad a_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial b_\nu}{\partial x^\mu}-\frac{\partial b_\mu}{\partial x^\nu}\right). \tag{4.11}$$

В сопутствующей системе отсчета ($b^i=0$) вспомогательные величины $a_{\mu\nu}$ равны

$$a_{00}=0\,,\quad a_{0i}=\frac{1}{2c^2}\left(\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^i}-\frac{\partial v_i}{\partial t}\right),\quad a_{ik}=\frac{1}{2c}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x^k}-\frac{\partial v_k}{\partial x^i}\right) \tag{4.12}$$

и компоненты четырехмерного тензора вращения пространства принимают вид

$$\begin{gathered}A_{00}=0\,,\qquad A_{0i}=-A_{i0}=0\,,\\ A_{ik}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x^i}-\frac{\partial v_i}{\partial x^k}\right)+\frac{1}{2c^2}\left(F_i v_k-F_k v_i\right).\end{gathered} \tag{4.13}$$

Без гравитационного поля тензор угловых скоростей вращения пространства выражается только через линейную скорость враще-

ния v_i, тогда мы обозначаем его $A_{\alpha\beta} = \Omega_{\alpha\beta}$

$$\Omega_{00} = 0\,, \quad \Omega_{0i} = -\,\Omega_{i0} = 0\,, \quad \Omega_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x^i} - \frac{\partial v_i}{\partial x^k}\right). \qquad (4.14)$$

С другой стороны, согласно концепции частица-волна, каждой частице соответствует волна с энергией $E = mc^2 = \hbar\omega$, где m релятивистская масса частицы и ω ее собственная частота. Иначе говоря, с геометрической точки зрения, каждую частицу можно рассматривать как волну, определенную в бесконечно близкой окрестности геометрического места частицы, собственная частота которой зависит от некоторого распределения угловых скоростей $\omega_{\alpha\beta}$, определенного также в этой окрестности. Тогда упомянутое квантовое соотношение в тензорной записи принимает вид $mc^2 = \hbar^{\alpha\beta}\omega_{\alpha\beta}$.

Так как тензор Планка антисимметричен, то все его диагональные компоненты равны нулю. Его пространственно-временные (смешанные) компоненты в сопутствуюшей системе отсчета также должны быть равными нулю аналогично соответствующим компонентам четырехмерного тензора угловых скоростей вращения пространства (4.14). Значения пространственных (трехмерных) компонент тензора Планка, в соответствии с результатами общеизвестных экспериментов, демонстрирующих свойства спина частиц, составляют $\pm\hbar$ в зависимости от направления вращения и образуют трехмерный хронометрически инвариантный (наблюдаемый) тензор Планка $\hbar^{ik}$. В случае левого вращения компоненты $\hbar^{12}$, $\hbar^{23}$, $\hbar^{31}$ имеют положительный знак, а компоненты $\hbar^{13}$, $\hbar^{32}$, $\hbar^{21}$ отрицательный знак.

Тогда геометрическая структура четырехмерного тензора Планка, выраженная в виде матрицы, выглядит следующим образом

$$\hbar^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hbar & -\hbar \\ 0 & -\hbar & 0 & \hbar \\ 0 & \hbar & -\hbar & 0 \end{pmatrix}. \qquad (4.15)$$

При правом вращении компоненты $\hbar^{12}$, $\hbar^{23}$, $\hbar^{31}$, наоборот, являются отрицательными, а компоненты $\hbar^{13}$, $\hbar^{32}$, $\hbar^{21}$ положительными

$$\hbar^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\hbar & \hbar \\ 0 & \hbar & 0 & -\hbar \\ 0 & -\hbar & \hbar & 0 \end{pmatrix}. \qquad (4.16)$$

Квадрат четырехмерного тензора Планка вычисляется следую-

щим образом

$$\hbar_{\alpha\beta}\,\hbar^{\alpha\beta}=2\hbar^2\left[\left(g_{11}g_{22}-g_{12}^2\right)+\left(g_{11}g_{33}-g_{13}^2\right)+\left(g_{22}g_{33}-g_{23}^2\right)+\right.$$
$$\left.+\,2\left(g_{12}g_{23}-g_{22}g_{13}-g_{12}g_{33}+g_{13}g_{23}-g_{11}g_{23}+g_{12}g_{13}\right)\right], \tag{4.17}$$

и в пространстве Минковского, когда система отсчета является галилеевой и метрика принимает диагональный вид (2.70), численно равен $\hbar_{\alpha\beta}\hbar^{\alpha\beta}=6\hbar^2$. В псевдоримановом пространстве значение $\hbar_{\alpha\beta}\hbar^{\alpha\beta}$ вычисляется при подстановке в (4.17) зависимости трехмерных компонент фундаментального метрического тензора от наблюдаемого трехмерного метрического тензора $h_{ik}=-\,g_{ik}+\frac{1}{c^2}v_i v_k$ и скорости вращения пространства. Поэтому, хотя наблюдаемые компоненты $\hbar^{ik}$ тензора Планка имеют постоянное значение (с разными знаками для левого и правого вращения), его квадрат в общем случае зависит от угловой скорости вращения пространства.

Теперь, когда мы определили компоненты тензора Планка, можно приступить непосредственно к вычислениям дополнительного импульса, приобретаемого частицей за счет ее спина, и к выводу динамических уравнений движения частицы со спином в псевдоримановом пространстве.

§ 4.2 Спин-импульс частицы в уравнениях движения

Добавочный импульс S^α, приобретаемый частицей за счет ее спина, мы получим, исследовав *действие* для частицы со спином. Итак, действие S для частицы, обладающей внутренним скалярным полем k, с которым взаимодействует некоторое внешнее поле A и за счет этого взаимодействия перемещает частицу на интервал ds, имеет вид

$$S=\alpha_{(kA)}\int_a^b kA\,ds\,, \tag{4.18}$$

где $\alpha_{(kA)}$ скалярная константа, характеризующая свойство частицы в данном взаимодействии и уравновешивающая размерности. Если внутреннему скалярному полю частицы k отвечает внешнее поле тензора 1-го ранга A_α, то действие по перемещению частицы этим векторным полем будет иметь вид

$$S=\alpha_{(kA_\alpha)}\int_a^b kA_\alpha\,dx^\alpha. \tag{4.19}$$

При взаимодействии внутреннего скалярного поля k частицы с внешним полем тензора 2-го ранга $A_{\alpha\beta}$, действие этого поля по пе-

ремещению частицы, соответственно, вычисляется по правилу

$$S = \alpha_{(kA_{\alpha\beta})}\int_a^b kA_{\alpha\beta}\,dx^\alpha dx^\beta. \qquad (4.20)$$

И так далее. Например, если собственному векторному полю частицы k^α отвечает внешнее векторное поле A_α, то действие по перемещению частицы за счет этого взаимодействия выглядит так

$$S = \alpha_{(k^\alpha A_\alpha)}\int_a^b k^\alpha A_\alpha\,ds\,. \qquad (4.21)$$

Кроме того, действие, независимо от характера внутренних свойств частицы и внешнего поля, всегда можно представить как

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt\,, \qquad (4.22)$$

где L так называемая *функция Лагранжа* (лагранжиан).

Так как размерность действия S есть [эрг сек = дин см сек = = грамм см^2/ сек], то функция Лагранжа имеет размерность энергии [эрг = грамм см^2/ сек^2]. Причем производная от функции Лагранжа по трехмерной координатной скорости частицы $u^i = \frac{dx^i}{dt}$

$$\frac{\partial L}{\partial u^i} = p_i \qquad (4.23)$$

есть ковариантная форма ее трехмерного импульса $p^i = cP^i$, по которой можно восстановить выражение для четырехмерного вектора импульса частицы P^α. Таким образом, записав действие для частицы со спином, выделив функцию Лагранжа и продифференцировав ее по координатной скорости частицы, мы можем вычислить дополнительный импульс, получаемый частицей за счет ее спина.

Как известно, действие по перемещению свободной частицы в псевдоримановом пространстве имеет вид*

$$S = \int_a^b m_0 c\,ds\,. \qquad (4.24)$$

*В *Теории поля* [10] действие взято со знаком “минус”, тогда как у нас перед интегралом действия и в функции Лагранжа всегда стоит “плюс”. Это обусловлено тем, что знак действия зависит от вида сигнатуры псевдориманова пространства. Ландау и Лифшиц в *Теории поля* используют сигнатуру $(-+++)$, т.е. время у них мнимое, пространственные координаты вещественные и трехмерный координатный импульс положителен (см. ниже). У нас, как и в работах Зельманова [9, 11–13], сигнатура имеет вид $(+---)$, т.е. время вещественное и пространственные координаты мнимые: в этом случае трехмерный *наблюдаемый* импульс является положительным.

В галилеевой системе отсчета пространства Минковского, т.к. перекрестные члены фундаментального метрического тензора равны нулю, пространственно-временной интервал

$$ds = \sqrt{g_{\alpha\beta}\, dx^{\alpha} dx^{\beta}} = cdt\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \tag{4.25}$$

и действие принимает вид

$$S = \int_a^b m_0 c\, ds = \int_{t_1}^{t_2} m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}\; dt\,. \tag{4.26}$$

Таким образом, функция Лагранжа свободной частицы в галилеевой системе отсчета пространства Минковского равна

$$L = m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}\,. \tag{4.27}$$

Дифференцируя ее по координатной скорости, получаем ковариантную форму трехмерного импульса

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial u^i} = m_0 c^2\, \frac{\partial \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{\partial u^i} = -\frac{m_0\, u_i}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}\,, \tag{4.28}$$

отсюда, после поднятия индексов, следует, что четырехмерный вектор импульса свободной частицы имеет вид

$$P^{\alpha} = \frac{m_0}{c\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\frac{dx^{\alpha}}{dt} = m_0 \frac{dx^{\alpha}}{ds}\,. \tag{4.29}$$

Так как здесь оба сомножителя m_0 и $\frac{dx^{\alpha}}{ds}$ в итоговом выражении общековариантны, т.е. не зависят от выбора конкретной системы отсчета, то это выражение для четырехмерного импульса, полученное в галилеевой системе отсчета, справедливо также и в любой другой (произвольной) системе отсчета псевдориманова пространства. Теперь рассмотрим движение частицы, обладающей внутренней структурой, проявляющейся в экспериментах как ее свойство, называемое *спином.* Внутреннему вращению (спину) частицы $n\hbar^{\alpha\beta}$ в четырехмерном псевдоримановом пространстве отвечает внешнее поле вращения $A_{\alpha\beta}$ самого пространства. Таким образом, общее действие для частицы со спином имеет следующий вид

$$S = \int_a^b \left(m_0 c\, ds + \alpha_{(\mathrm{s})} \hbar^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}\, ds\right), \tag{4.30}$$

где $\alpha_{(\mathrm{s})}$ [сек/см] скалярная константа, характеризующая частицу в спин-взаимодействии. Так как в состав константы действия могут входить лишь характеристики свойств частицы и фундаментальные физические константы, очевидно, что $\alpha_{(\mathrm{s})}$ представляет собой спиновое квантовое число n, являющееся функцией внутренних свойств частицы, деленное на скорость света $\alpha_{(\mathrm{s})}=\frac{n}{c}$. Тогда действие по перемещению частицы, возникающее из-за взаимодействия ее спина с полем неголономности пространства $A_{\alpha\beta}$ (4.13) равно

$$S=\alpha_{(\mathrm{s})}\int_a^b \hbar^{\alpha\beta}A_{\alpha\beta}\,ds=\frac{n}{c}\int_a^b \hbar^{\alpha\beta}A_{\alpha\beta}\,ds\,. \tag{4.31}$$

Здесь необходимо отметить, что построить четырехмерный вектор импульса для частицы со спином тем же способом, как и для свободной частицы, невозможно. Вспомним, импульс свободной частицы был вначале получен в галилеевой системе отсчета пространства Минковского, где выражение ds через интервал координатного времени dt, подставляемое в действие, имеет простой вид (4.25). Было показано, что полученное выражение (4.29), в силу его общековариантности, справедливо для любой системы отсчета псевдориманова пространства. Однако, как видно из действия для частицы со спином, спин влияет на движение частицы только в неголономном пространстве $A_{\alpha\beta}\neq 0$, т.е. когда не равны нулю перекрестные члены g_{0i} фундаментального метрического тензора. В галилеевой системе отсчета, по определению, все перекрестные члены метрического тензора равны нулю, следовательно, равны нулю скорость вращения пространства $v_i=-c\frac{g_{0i}}{\sqrt{g_{00}}}$ и тензор неголономности $A_{\alpha\beta}$. Поэтому бессмысленно выводить импульс частицы со спином в галилеевой системе отсчета пространства Минковского (там он просто равен нулю), нужно выводить его сразу в псевдоримановом пространстве. В произвольной сопутствующей системе отсчета псевдориманова пространства интервал ds равен

$$ds=cd\tau\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}=cdt\left(1-\frac{\mathrm{w}+v_iu^i}{c^2}\right)\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2\left(1-\frac{\mathrm{w}+v_iu^i}{c^2}\right)^2}}\,, \tag{4.32}$$

где координатная скорость частицы $u^i=\frac{dx^i}{dt}$ выражается через ее наблюдаемую скорость $\mathrm{v}^i=\frac{dx^i}{d\tau}$ в виде

$$\mathrm{v}^i=\frac{u^i}{1-\frac{\mathrm{w}+v_iu^i}{c^2}}\,,\qquad \mathrm{v}^2=\frac{h_{ik}u^iu^k}{\left(1-\frac{\mathrm{w}+v_iu^i}{c^2}\right)^2}\,. \tag{4.33}$$

Тогда дополнительное действие по перемещению частицы (4.31), возникающее из-за взаимодействия ее спина с полем неголономности пространства принимает вид

$$S = n\int_{t_1}^{t_2} \hbar^{\alpha\beta}A_{\alpha\beta}\sqrt{\left(1-\frac{\mathrm{w}+v_i u^i}{c^2}\right)^2-\frac{u^2}{c^2}}\,dt\,. \tag{4.34}$$

Таким образом, функция Лагранжа для действия, вызванного спином частицы, выглядит следующим образом

$$L = n\hbar^{\alpha\beta}A_{\alpha\beta}\sqrt{\left(1-\frac{\mathrm{w}+v_i u^i}{c^2}\right)^2-\frac{u^2}{c^2}}\,. \tag{4.35}$$

Теперь, чтобы получить дополнительный импульс, приобретенный частицей за счет ее спина, нам осталось взять производную от этой функции Лагранжа (4.35) по координатной скорости частицы. Учитывая, что $\hbar^{\alpha\beta}$ как тензор внутреннего вращения частицы и $A_{\alpha\beta}$ (4.13) как тензор собственного вращения пространства не являются функциями скорости перемещения частицы, после дифференцирования получаем

$$\begin{aligned} p_i = \frac{\partial L}{\partial u^i} = n\hbar^{mn}A_{mn}\,\frac{\partial}{\partial u^i}\sqrt{\left(1-\frac{\mathrm{w}+v_i u^i}{c^2}\right)^2-\frac{u^2}{c^2}} = \\ = -\,\frac{n\hbar^{mn}A_{mn}}{c^2\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\,(v_i+\mathrm{v}_i)\,, \end{aligned} \tag{4.36}$$

где $\mathrm{v}_i = h_{ik}\mathrm{v}^k$. Сравним выражение (4.36) с пространственной ковариантной компонентой $p_i = cP_i$ четырехмерного вектора импульса $P^\alpha = m_0\frac{dx^\alpha}{ds}$ массовой частицы в псевдоримановом пространстве. Для массовой частицы нашего мира, движущейся относительно нас из прошлого в будущее (прямой ход времени), трехмерный ковариантный импульс имеет вид [19]

$$p_i = cP_i = cg_{i\alpha}P^\alpha = -\,m\,(v_i+\mathrm{v}_i) = -\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\,(v_i+\mathrm{v}_i)\,. \tag{4.37}$$

Отсюда видно, что четырехмерный вектор импульса S^α, получаемый частицей за счет ее спина (спин-импульс), равен

$$S^\alpha = \frac{1}{c^2}\,n\hbar^{\mu\nu}A_{\mu\nu}\,\frac{dx^\alpha}{ds}\,, \tag{4.38}$$

или, обозначив для простоты записи $\eta_0 = n\hbar^{\mu\nu}A_{\mu\nu} = n\hbar^{mn}A_{mn}$

$$S^{\alpha} = \frac{1}{c^2}\,\eta_0\,\frac{dx^{\alpha}}{ds}\,. \tag{4.39}$$

Тогда суммарный динамический вектор Q^{α} (4.1), характеризующий движение частицы со спином, равен

$$Q^{\alpha} = P^{\alpha} + S^{\alpha} = m_0\,\frac{dx^{\alpha}}{ds} + \frac{1}{c^2}\,n\hbar^{\mu\nu}A_{\mu\nu}\,\frac{dx^{\alpha}}{ds}\,. \tag{4.40}$$

Таким образом, частица со спином в неголономном пространстве ($A_{\mu\nu} \neq 0$) действительно приобретает дополнительный импульс, отклоняющий ее от геодезической траектории (траектории свободной частицы) и делающий ее движение негеодезическим. В отсутствии вращения пространства, т.е. когда пространство является голономным, величины $A_{\mu\nu} = 0$, и спин частицы никак не влияют на ее движение. Впрочем, вряд ли где-то найдется такая область пространства, в которой полностью отсутствует вращение. Видимо, поэтому спин наиболее сильно влияет на движение частиц в атомной физике, где вращения особенно сильны.

§ 4.3 Уравнения движения частицы со спином

Динамические уравнения движения частицы со спином геометрически суть уравнения параллельного переноса суммарного вектора $Q^{\alpha} = P^{\alpha} + S^{\alpha}$ (4.40) вдоль траектории ее движения в четырехмерном псевдоримановом пространстве

$$\frac{d}{ds}\left(P^{\alpha} + S^{\alpha}\right) + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\left(P^{\mu} + S^{\mu}\right)\frac{dx^{\nu}}{ds} = 0\,, \tag{4.41}$$

где квадрат переносимого суммарного вектора сохраняется ($Q_{\alpha}Q^{\alpha} = const$) вдоль всей траектории параллельного переноса.

Наша задача — вычислить хронометрически инвариантные (физические наблюдаемые) проекции этих уравнений на время и на пространство в сопутствующей системе отсчета. Общий вид этих проекций, полученный во 2-й главе

$$\frac{d\varphi}{ds} - \frac{1}{c}\,F_i q^i\,\frac{d\tau}{ds} + \frac{1}{c}\,D_{ik}\,q^i\,\frac{dx^k}{ds} = 0\,, \tag{4.42}$$

$$\frac{dq^i}{ds} + \left(\frac{\varphi}{c}\frac{dx^k}{ds} + q^k\frac{d\tau}{ds}\right)\left(D^i_k + A^{\cdot i}_{k\cdot}\right) - \frac{\varphi}{c}\,F^i\,\frac{d\tau}{ds} + \Delta^i_{mk}\,q^m\,\frac{dx^k}{ds} = 0\,, \tag{4.43}$$

где, в данном случае, φ — это проекция суммарного вектора Q_{α} на

время и q^i — это его проекция на пространство

$$\varphi = b_\alpha Q^\alpha = \frac{Q_0}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{P_0}{\sqrt{g_{00}}} + \frac{S_0}{\sqrt{g_{00}}}\,, \tag{4.44}$$

$$q^i = h^i_\alpha Q^\alpha = Q^i = P^i + S^i. \tag{4.45}$$

Таким образом, выполнение поставленной задачи сводится к вычислению величин φ и q^i, подстановке их в уравнения (4.42, 4.43) и приведению подобных членов. Проекции вектора импульса массовой частицы $P^\alpha = m_0 \frac{dx^\alpha}{ds}$ имеют вид

$$\frac{P_0}{\sqrt{g_{00}}} = \pm m\,, \qquad P^i = \frac{1}{c}\, m\mathrm{v}^i, \tag{4.46}$$

осталось вычислить проекции спин-импульса S^α. Учитывая в формуле для S^α (4.39), что пространственно-временной интервал, выраженный через физические наблюдаемые величины, имеет вид $ds = cd\tau\sqrt{1-\mathrm{v}^2/c^2}$, мы получаем компоненты S^α

$$S^0 = \frac{1}{c^2}\frac{n\hbar^{mn}A_{mn}}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\frac{\left(v_i\mathrm{v}^i \pm c^2\right)}{c^2\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)}\,, \tag{4.47}$$

$$S^i = \frac{1}{c^3}\frac{n\hbar^{mn}A_{mn}}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\,\mathrm{v}^i, \tag{4.48}$$

$$S_0 = \pm\frac{1}{c^2}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\frac{n\hbar^{mn}A_{mn}}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\,, \tag{4.49}$$

$$S_i = -\frac{1}{c^3}\frac{n\hbar^{mn}A_{mn}}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\left(v_i \pm \mathrm{v}_i\right), \tag{4.50}$$

также выраженные через физические наблюдаемые величины. Отсюда получаем выражения для физических наблюдаемых проекций спин-импульса частицы. Они имеют вид

$$\frac{S_0}{\sqrt{g_{00}}} = \pm\frac{1}{c^2}\,\eta\,, \qquad S^i = \frac{1}{c^3}\,\eta\mathrm{v}^i, \tag{4.51}$$

где η обозначает

$$\eta = \frac{n\hbar^{mn}A_{mn}}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\,, \tag{4.52}$$

и знакопеременность, возникающая в результате подстановки функции времени $\frac{dt}{d\tau}$ (1.55), указывает на направление движения частицы в будущее (верхний знак) или в прошлое (нижний знак). Тогда квадрат спин-импульса частицы равен

$$S_\alpha S^\alpha = g_{\alpha\beta}\, S^\alpha S^\beta = \frac{1}{c^4}\,\eta_0^2\, g_{\alpha\beta}\,\frac{dx^\alpha dx^\beta}{ds^2} = \frac{1}{c^4}\,\eta_0^2 \tag{4.53}$$

и квадрат ее суммарного динамического вектора Q^α равен

$$Q_\alpha Q^\alpha = g_{\alpha\beta}\, Q^\alpha Q^\beta = m_0^2 + \frac{2}{c^2}\, m_0\eta_0 + \frac{1}{c^4}\,\eta_0^2\,. \tag{4.54}$$

Таким образом, квадрат длины суммарного вектора частицы со спином складывается из трех частей:

1) квадрата длины собственного четырехмерного импульса частицы $P_\alpha P^\alpha = m_0^2$;
2) квадрата ее четырехмерного спин-импульса $S_\alpha S^\alpha = \frac{1}{c^4}\,\eta_0^2$;
3) члена $\frac{2}{c^2}\,m_0\eta_0$, характеризующего спин-гравитационное взаимодействие.

Для осуществления параллельного переноса (4.41) необходимо, чтобы квадрат переносимого суммарного вектора сохранялся вдоль всего пути переноса. Однако из полученного выражения (4.54) следует, что, т.к. $m_0 = const$, квадрат суммарного вектора частицы со спином Q^α сохраняется только тогда, когда вдоль ее траектории $\eta_0 = const$, т.е.

$$d\eta_0 = \frac{\partial\eta_0}{\partial x^\alpha}\, dx^\alpha = 0\,. \tag{4.55}$$

Поделив обе части этого равенства на $d\tau$, что всегда возможно*, т.к. элементарный интервал физического времени наблюдателя больше нуля, получаем хронометрически инвариантное условие постоянства квадрата суммарного вектора частицы со спином

$$\frac{d\eta_0}{d\tau} = \frac{{}^*\partial\eta_0}{\partial t} + \mathrm{v}^k\,\frac{{}^*\partial\eta_0}{\partial x^k} = 0\,. \tag{4.56}$$

Подставляя сюда $\eta_0 = n\hbar^{mn}A_{mn}$ имеем

$$n\hbar^{mn}\left(\frac{{}^*\partial A_{mn}}{\partial t} + \mathrm{v}^k\,\frac{{}^*\partial A_{mn}}{\partial x^k}\right) = 0\,. \tag{4.57}$$

---

*Условие $d\tau = 0$ имеет смысл только в обобщенном пространстве-времени, в котором возможно вырождение четырехмерного фундаментального метрического тензора $g_{\alpha\beta}$. Тогда упомянутое условие определяет полностью вырожденную область (нуль-пространство), где существуют нуль-частицы, перемещающиеся мгновенно, т.е. являющиеся носителями дальнодействия.

Чтобы наглядно представить себе этот результат, выразим трехмерный хронометрически инвариантный тензор угловой скорости вращения пространства A_{ik} через псевдовектор трехмерной угловой скорости этого вращения

$$\Omega^{*i} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{imn}A_{mn}\,, \tag{4.58}$$

также являющийся хронометрическим инвариантом. Умножая Ω^{*i} на ε_{ipq}

$$\Omega^{*i}\,\varepsilon_{ipq} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{imn}\varepsilon_{ipq}A_{mn} = \frac{1}{2}\left(\delta^m_p\delta^n_q - \delta^n_p\delta^m_q\right)A_{mn} = A_{pq}\,, \tag{4.59}$$

получаем выражение (4.57) в виде

$$\begin{aligned} &n\hbar^{mn}\left[\frac{{}^*\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_{imn}\Omega^{*i}\right) + \mathrm{v}^k\,\frac{{}^*\partial}{\partial x^k}\left(\varepsilon_{imn}\Omega^{*i}\right)\right] = \\ &= n\hbar^{mn}\varepsilon_{imn}\left[\frac{1}{\sqrt{h}}\frac{{}^*\partial}{\partial t}\left(\sqrt{h}\,\Omega^{*i}\right) + \mathrm{v}^k\frac{1}{\sqrt{h}}\frac{{}^*\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{h}\,\Omega^{*i}\right)\right] = 0\,. \end{aligned} \tag{4.60}$$

Гравитационно-инерциальная сила и тензор неголономности связаны двумя тождествами Зельманова [9, 11–13], одно из которых имеет вид

$$\frac{2}{\sqrt{h}}\frac{{}^*\partial}{\partial t}\left(\sqrt{h}\,\Omega^{*i}\right) + \varepsilon^{ijk}\,{}^*\nabla_j\,F_k = 0\,, \tag{4.61}$$

или, в другой форме записи

$$\frac{{}^*\partial A_{ik}}{\partial t} + \frac{1}{2}\left({}^*\nabla_k\,F_i - {}^*\nabla_i\,F_k\right) = \frac{{}^*\partial A_{ik}}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{{}^*\partial F_k}{\partial x^i} - \frac{{}^*\partial F_i}{\partial x^k}\right) = 0\,, \tag{4.62}$$

где $\varepsilon^{ijk}\,{}^*\nabla_j\,F_k$ хронометрически инвариантный (наблюдаемый) вихрь поля гравитационно-инерциальной силы F_k. Отсюда видно, что нестационарность тензора угловой скорости вращения пространства A_{ik} обусловлена ***вихревым характером*** поля гравитационно-инерциальной силы F_i в пространстве тела отсчета.

Итак, с учетом тождества (4.61), наше выражение принимает вид

$$-\,n\hbar^{mn}\,{}^*\nabla_m\,F_n + n\hbar^{mn}\varepsilon_{imn}\mathrm{v}^k\,\frac{1}{\sqrt{h}}\frac{{}^*\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{h}\,\Omega^{*i}\right) = 0\,, \tag{4.63}$$

или иначе

$$n\hbar^{mn}\,{}^*\nabla_m\,F_n = n\hbar^{mn}\varepsilon_{imn}\mathrm{v}^k\left(\Omega^{*i}\,\frac{{}^*\partial\ln\sqrt{h}}{\partial x^k} + \frac{{}^*\partial\Omega^{*i}}{\partial x^k}\right). \tag{4.64}$$

Вспомним, что это выражение — лишь развернутая хронометрически инвариантная запись условия постоянства квадрата суммарного вектора частицы со спином (4.57). Левую часть (4.64) можно представить в виде

$$\pm\, 2n\hbar\left({}^*\nabla_1 F_2 - {}^*\nabla_2 F_1 + {}^*\nabla_1 F_3 - {}^*\nabla_3 F_1 + {}^*\nabla_2 F_3 - {}^*\nabla_3 F_2\right), \quad (4.65)$$

где знаки "плюс" и "минус" относятся к правой и левой системам координат, соответственно. Таким образом, левая часть выражения (4.64) представляет собой хронометрически инвариантный вихрь (ротор) гравитационно-инерциальной силы. Правая часть (4.64) зависит от пространственной ориентации поля псевдовектора угловой скорости вращения пространства Ω^{*i}.

Итак, для сохранения квадрата переносимого вектора частицы со спином необходимо, чтобы правая и левая части выражения (4.64) были равны друг другу вдоль всей траектории частицы. В общем случае, т.е. без каких-либо дополнительных предположений о геометрической структуре пространства отсчета, это происходит при балансе между вихревым полем гравитационно-инерциальной силы пространства и пространственным распределением псевдовектора угловой скорости его вращения. Если же поле гравитационно-инерциальной силы является безвихревым, то вся левая часть условия сохранения переносимого вектора частицы со спином (4.64) равна нулю и это условие принимает вид

$$n\hbar^{mn}\varepsilon_{imn}\mathrm{v}^k\,\frac{1}{\sqrt{h}}\,\frac{{}^*\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{h}\,\Omega^{*i}\right) = 0\,. \quad (4.66)$$

Запишем в этом выражении хронометрически инвариантную производную как $\frac{{}^*\partial}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{1}{c^2}v_k\frac{{}^*\partial}{\partial t}$. Тогда получаем

$$n\hbar^{mn}\varepsilon_{imn}\mathrm{v}^k\,\frac{1}{\sqrt{h}}\left[\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{h}\,\Omega^{*i}\right) - \frac{1}{c^2}\,v_k\,\frac{{}^*\partial}{\partial t}\left(\sqrt{h}\,\Omega^{*i}\right)\right] = 0\,. \quad (4.67)$$

Так как поле силы F_i в данном случае является безвихревым, то, согласно (4.66), второй член в этом выражении равен нулю. Таким образом, квадрат суммарного вектора частицы со спином сохраняется в безвихревом поле гравитационно-инерциальной силы F_i при равенстве нулю не только хронометрически инвариантного выражения (4.66), но и выражения с простыми производными

$$n\hbar^{mn}\varepsilon_{imn}\mathrm{v}^k\,\frac{1}{\sqrt{h}}\,\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{h}\,\Omega^{*i}\right) = 0\,. \quad (4.68)$$

Для массовых частиц это бывает, например, при $\mathrm{v}^k = 0$, т.е. когда частица покоится относительно наблюдателя и его тела отсчета. Тогда равенство нулю производных из (4.68) не строго обязательно. Но безмассовые частицы пребывают в непрерывном движении со скоростью света, поэтому для них в безвихревом поле силы F_i обязательно должны быть равны нулю производные $\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{h}\,\Omega^{*i})$.

Теперь выведем хронометрически инвариантные динамические уравнения движения частицы со спином в псевдоримановом пространстве. Подставляя (4.46) и (4.51) в выражения (4.44, 4.45), получаем наблюдаемые компоненты суммарного вектора частицы со спином

$$\varphi = \pm\Big(m + \frac{1}{c^2}\,\eta\Big), \qquad q^i = \frac{1}{c}\,m\,\mathrm{v}^i + \frac{1}{c^3}\,\eta\mathrm{v}^i. \tag{4.69}$$

После подстановки этих величин для $\varphi > 0$ в выражения (4.42, 4.43), мы получаем хронометрически инвариантные уравнения движения для массовой частицы со спином, движущейся из прошлого в будущее

$$\frac{dm}{d\tau} - \frac{m}{c^2}\,F_i\mathrm{v}^i + \frac{m}{c^2}\,D_{ik}\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k = -\frac{1}{c^2}\frac{d\eta}{d\tau} + \frac{\eta}{c^4}\,F_i\mathrm{v}^i - \frac{\eta}{c^4}\,D_{ik}\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k, \tag{4.70}$$

$$\begin{gathered}\frac{d}{d\tau}\left(m\mathrm{v}^i\right) + 2m\left(D^i_k + A^{\cdot i}_{k\cdot}\right)\mathrm{v}^k - mF^i + m\Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k = \\ = -\frac{1}{c^2}\frac{d}{d\tau}\left(\eta\mathrm{v}^i\right) - \frac{2\eta}{c^2}\left(D^i_k + A^{\cdot i}_{k\cdot}\right)\mathrm{v}^k + \frac{\eta}{c^2}\,F^i - \frac{\eta}{c^2}\,\Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k.\end{gathered} \tag{4.71}$$

Для массовой частицы со спином, движущейся из будущего в прошлое, после подстановки величин (4.69) для $\varphi < 0$, эти уравнения принимают вид

$$-\frac{dm}{d\tau} - \frac{m}{c^2}\,F_i\mathrm{v}^i + \frac{m}{c^2}\,D_{ik}\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k = \frac{1}{c^2}\frac{d\eta}{d\tau} + \frac{\eta}{c^4}\,F_i\mathrm{v}^i - \frac{\eta}{c^4}\,D_{ik}\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k, \tag{4.72}$$

$$\begin{gathered}\frac{d}{d\tau}\left(m\mathrm{v}^i\right) + mF^i + m\Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k = \\ = -\frac{1}{c^2}\frac{d}{d\tau}\left(\eta\mathrm{v}^i\right) - \frac{\eta}{c^2}\,F^i - \frac{\eta}{c^2}\,\Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k,\end{gathered} \tag{4.73}$$

Получившиеся уравнения мы скомпоновали таким образом, что слева стоит *геодезическая часть*, характеризующая свободное (геодезическое) движение частицы, а справа сгруппированы члены, вызванные наличием спина частицы и делающие ее движение негеодезическим (*негеодезическая часть*). Таким образом, при движении частицы без спина правые части обращаются в нуль, и мы получаем

хронометрически инвариантные динамические уравнения движения свободной частицы. Такой вид уравнений движения позволит нам более наглядно провести их анализ в следующих параграфах.

Безмассовая частица в рамках концепции частица-волна обычно характеризуется четырехмерным волновым вектором $K^{\alpha} = \frac{\omega}{c}\frac{dx^{\alpha}}{d\sigma}$, где $d\sigma^2 = h_{ik}\,dx^i dx^k$ трехмерный физический наблюдаемый интервал, не равный нулю вдоль изотропных траекторий. Так как безмассовые частицы движутся вдоль изотропных траекторий (траектория распространения света), то вектор K^{α} также является изотропным: его квадрат равен нулю. Однако, т.к. размерность волнового вектора K^{α} [см $^{-1}$], выведенные с его помощью уравнения движения безмассовых частиц имеют размерность, отличную от уравнений движения массовых частиц. Кроме того, это обстоятельство не позволяет построить действие в единой форме для массовых и безмассовых частиц. Вместе с тем спин — физическое свойство, которым обладают как массовые, так и безмассовые частицы (например, фотоны). Поэтому при выводе уравнений движения частицы со спином необходимо использовать единый динамический вектор для обоих типов частиц. Этот вектор можно получить, применив физические условия, выполняющиеся вдоль изотропных траекторий,

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - d\sigma^2 = 0\,, \qquad c\,d\tau = d\sigma \neq 0\,, \tag{4.74}$$

к четырехмерному импульсу массовой частицы

$$P^{\alpha} = m_0 \frac{dx^{\alpha}}{ds} = \frac{m}{c}\frac{dx^{\alpha}}{d\tau} = m\,\frac{dx^{\alpha}}{d\sigma}\,. \tag{4.75}$$

В результате параметром дифференцирования становится наблюдаемый трехмерный интервал, не равный нулю вдоль изотропных траекторий, а размерность всего выражения, в отличии от четырехмерного волнового вектора K^{α} [сек$^{-1}$], совпадает с размерностью четырехмерного вектора импульса P^{α} [грамм]. Причем релятивистская масса m, не равная нулю для безмассовых частиц, вычисляется из ее энергетического эквивалента по формуле $E = mc^2$ Например, если энергия фотона равна $E = 1$ МэВ $= 1.6\times10^{-6}$ эрг, то его релятивистская масса составляет $m = 1.8\times10^{-28}$ грамм.

Таким образом, четырехмерный вектор импульса (4.75), в зависимости от его формы, может характеризовать как движение массовых частиц (неизотропные траектории), так и движение безмассовых частиц (изотропные траектории). Действительно, для безмассовых частиц $m_0 = 0$ и $ds = 0$, поэтому их частное $\frac{0}{0}$ в выражении (4.75) представляет собой неопределенность типа $0/0$. Переход от $\frac{m_0}{ds}$ к $\frac{m}{d\sigma}$

есть раскрытие этой неопределенности, т.к. релятивистская масса (масса движения) безмассовых частиц $m \neq 0$ и вдоль их траекторий $d\sigma \neq 0$.

Естественно, что в форме, применяемой к безмассовым частицам (т.е. вдоль изотропных траекторий), квадрат четырехмерного вектора импульса P^α (4.75) равен нулю

$$P_\alpha P^\alpha = g_{\alpha\beta} P^\alpha P^\beta = m^2 g_{\alpha\beta}\,\frac{dx^\alpha}{d\sigma}\frac{dx^\beta}{d\sigma} = m^2\,\frac{ds^2}{d\sigma^2} = 0\,. \tag{4.76}$$

Физические наблюдаемые компоненты четырехмерного вектора импульса безмассовых частиц $P^\alpha = m\frac{dx^\alpha}{d\sigma}$ равны

$$\frac{P_0}{\sqrt{g_{00}}} = \pm m\,, \qquad P^i = \frac{1}{c}\,mc^i, \tag{4.77}$$

где c^i трехмерный хронометрически инвариантный вектор скорости света. В этом случае спин-импульс частицы (4.39) также является изотропным

$$S^\alpha = \frac{1}{c^2}\,\eta_0\,\frac{dx^\alpha}{ds} = \frac{1}{c^2}\,\eta\,\frac{dx^\alpha}{cd\tau} = \frac{1}{c^2}\,\eta\,\frac{dx^\alpha}{d\sigma}\,, \tag{4.78}$$

т.к. его квадрат равен нулю

$$S_\alpha S^\alpha = g_{\alpha\beta} S^\alpha S^\beta = \frac{1}{c^4}\,\eta^2 g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha dx^\beta}{d\sigma^2} = \frac{1}{c^4}\,\eta^2\,\frac{ds^2}{d\sigma^2} = 0\,, \tag{4.79}$$

и, следовательно, квадрат суммарного вектора безмассовой частицы со спином $Q^\alpha = P^\alpha + S^\alpha$ также равен нулю. Наблюдаемые проекции изотропного спин-импульса (спин-импульса безмассовой частицы) имеют вид

$$\frac{S_0}{\sqrt{g_{00}}} = \pm\,\frac{1}{c^2}\,\eta\,, \qquad S^i = \frac{1}{c^3}\,\eta c^i, \tag{4.80}$$

причем его временная проекция совпадает совпадает с аналогичной для массовых (неизотропных) частиц (4.51), а в пространственной проекции вместо произвольной наблюдаемой скорости v^i (4.51) стоит вектор наблюдаемой скорости света c^i. Соответственно, наблюдаемые компоненты суммарного динамического вектора безмассовой частицы со спином

$$\varphi = \pm\Big(m + \frac{1}{c^2}\,\eta\Big), \qquad q^i = \frac{1}{c}\,mc^i + \frac{1}{c^3}\,\eta c^i. \tag{4.81}$$

После подстановки этих значений при положительном φ в исходные формулы (4.42, 4.43) получаем хронометрически инвариантные

динамические уравнения движения безмассовой частицы со спином, которая движется из прошлого в будущее,

$$\frac{dm}{d\tau} - \frac{m}{c^2}\,F_i c^i + \frac{m}{c^2}\,D_{ik}c^i c^k = -\frac{1}{c^2}\frac{d\eta}{d\tau} + \frac{\eta}{c^4}\,F_i c^i - \frac{\eta}{c^4}\,D_{ik}c^i c^k, \quad (4.82)$$

$$\begin{gathered}\frac{d}{d\tau}\left(mc^i\right) + 2m\left(D^i_k + A^{\cdot i}_{k\cdot}\right)c^k - mF^i + m\Delta^i_{nk}c^n c^k = \\ = -\frac{1}{c^2}\frac{d}{d\tau}\left(\eta c^i\right) - \frac{2\eta}{c^2}\left(D^i_k + A^{\cdot i}_{k\cdot}\right)c^k + \frac{\eta}{c^2}\,F^i - \frac{\eta}{c^2}\,\Delta^i_{nk}c^n c^k.\end{gathered} \quad (4.83)$$

Соответственно, для безмассовой частицы со спином, движущейся из будущего в прошлое, после подстановки значений (4.81) при $\varphi < 0$, уравнения принимают вид

$$-\frac{dm}{d\tau} - \frac{m}{c^2}\,F_i c^i + \frac{m}{c^2}\,D_{ik}c^i c^k = \frac{1}{c^2}\frac{d\eta}{d\tau} + \frac{\eta}{c^4}\,F_i c^i - \frac{\eta}{c^4}\,D_{ik}c^i c^k, \quad (4.84)$$

$$\begin{gathered}\frac{d}{d\tau}\left(mc^i\right) + mF^i + m\Delta^i_{nk}c^n c^k = \\ = -\frac{1}{c^2}\frac{d}{d\tau}\left(\eta c^i\right) - \frac{\eta}{c^2}\,F^i - \frac{\eta}{c^2}\,\Delta^i_{nk}c^n c^k.\end{gathered} \quad (4.85)$$

Что касается нуль-частиц, обитающих в полностью вырожденном пространстве-времени, на сегодняшний день мы не располагаем экспериментальными данными о том, обладают ли они собственным внутренним вращением (спином) или нет.

§ 4.4 Физические условия спин-взаимодействия

Итак, спин (внутренний механический момент) частицы взаимодействует с внешним полем вращения пространства — полем тензора неголономности $A^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,c h^{\alpha\mu} h^{\beta\nu}\left(\frac{\partial b_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial b_\mu}{\partial x^\nu}\right)$, являющимся функцией ротора четырехмерного вектора скорости наблюдателя b^α. В электромагнитных явлениях частица взаимодействует тоже с внешним полем тензора 2-го ранга, тензора Максвелла $F_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}$, т.е. ротором четырехмерного электромагнитного потенциала. Поэтому имеет смысл сравнить наблюдаемые характеристики поля Максвелла $F_{\alpha\beta}$ с их аналогами для поля неголономности $A_{\alpha\beta}$.

В предыдущей главе мы получили, что поле тензора Максвелла имеет две группы наблюдаемых величин, образованных собственно ковариантным тензором $F_{\alpha\beta}$ и дуальным ему псевдотензором $F^{*\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,E^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\mu\nu}$, где $E^{\alpha\beta\mu\nu}$ четырехмерный совершенно антисимметричный дискриминантный тензор, образующий псевдотензоры в

четырехмерном псевдоримановом пространстве,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{F_{0\cdot}^{\cdot i}}{\sqrt{g_{00}}}=E^i\,, &&F^{ik}=H^{ik}\\ &\frac{F_{0\cdot}^{*\cdot i}}{\sqrt{g_{00}}}=H^{*i}\,, &&F^{*ik}=E^{*ik}\end{aligned}\right\}. \tag{4.86}$$

Аналогичные компоненты общековариантного тензора неголономности $A_{\alpha\beta}$ (4.11) и псевдотензора $A^{*\alpha\beta}=\frac{1}{2}E^{\alpha\beta\mu\nu}A_{\mu\nu}$, вычисленные в сопутствующей системе отсчета, имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{A_{0\cdot}^{\cdot i}}{\sqrt{g_{00}}}=0\,, &&A^{ik}=h^{im}h^{kn}A_{mn}\\ &\frac{A_{0\cdot}^{*\cdot i}}{\sqrt{g_{00}}}=0\,, &&A^{*ik}=0\end{aligned}\right\}. \tag{4.87}$$

Сравнивая эти выражения с наблюдаемыми компонентами тензора и псевдотензора Максвелла (4.86), также вычисленными в сопутствующей системе отсчета, мы видим, что в случае спин-взаимодействия имеется аналог лишь "магнитной" составляющей поля неголономности $\mathcal{H}^{ik}=A^{ik}=h^{im}h^{kn}A_{mn}$. Аналог "электростатической" составляющей поля неголономности в спин-взаимодействии получается равным нулю $\mathcal{E}^i=\frac{A_{0\cdot}^{\cdot i}}{\sqrt{g_{00}}}=0$. Впрочем, это и неудивительно, т.к. спин (внутреннее поле вращения) частицы взаимодействует с внешним полем неголономности пространства и оба этих поля созданы движением. Кроме того, для поля неголономности аналог "магнитной" составляющей $\mathcal{H}^{ik}=A^{ik}\neq 0$ не может быть дуальным равной нулю величине $\mathcal{H}^{*i}=\frac{A_{0\cdot}^{*\cdot i}}{\sqrt{g_{00}}}=0$. Аналогия с электромагнитным полем получается неполной. Но абсолютного совпадения и не следовало ожидать, т.к. тензор неголономности и тензор электромагнитного поля имеют несколько разную структуру: тензор Максвелла представляет собой ротор в "чистом" виде $F_{\alpha\beta}=\frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}$, тогда как тензор неголономности является ротором с "добавками" $A^{\alpha\beta}=\frac{1}{2}c\,h^{\alpha\mu}h^{\beta\nu}\big(\frac{\partial b_\nu}{\partial x^\mu}-\frac{\partial b_\mu}{\partial x^\nu}\big)$. Вместе с тем мы не сомневаемся, что такой сравнительный анализ этих близких по структуре полей в будущем позволит построить теорию спин-взаимодействия, схожую с теорией электромагнитных явлений. Неполная аналогия поля неголономности пространства и электромагнитного поля, в частности, приводит еще вот к чему. Если определить силу спин-взаимодействия так же, как и силу Лоренца $\Phi^\alpha=\frac{e}{c}F_{\cdot\sigma}^{\alpha\cdot}U^\sigma$, то получившееся выражение $\Phi^\alpha=\frac{\eta_0}{c^2}A_{\cdot\sigma}^{\alpha\cdot}U^\sigma$ будет включать в себя *не все* члены правых

частей уравнения движения частицы со спином. Однако стороняя сила, действующая на частицу, по определению должна включать в себя все факторы, отклоняющие частицу от геодезической траектории, т.е. все члены в правых частях динамических уравнений движения. Иначе говоря, четырехмерная сила спин-взаимодействия Φ^α [грамм/сек] определяется общековариантным выражением

$$\Phi^\alpha = \frac{DS^\alpha}{ds} = \frac{dS^\alpha}{ds} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} S^\mu \,\frac{dx^\nu}{ds}\,, \tag{4.88}$$

проекция которого на пространство (после деления на c) дает трехмерную силу спин-взаимодействия Φ^i [грамм см / сек^2]. Например, для массовых частиц нашего мира из форм. (4.71) имеем

$$\Phi^i = -\frac{1}{c^2}\frac{d}{d\tau}\left(\eta \mathrm{v}^i\right) - \frac{2\eta}{c^2}\left(D^i_k + A^{\cdot i}_{k\cdot}\right)\mathrm{v}^k + \frac{\eta}{c^2}\,F^i - \frac{\eta}{c^2}\,\Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k. \tag{4.89}$$

Продолжая сопоставление электромагнитного и спин-взаимодействия, по аналогии с инвариантами электромагнитного поля (3.25, 3.26) вычислим инварианты поля неголономности. В сопутствующей системе отсчета они принимают вид

$$J_1 = A_{\alpha\beta}A^{\alpha\beta} = A_{ik}A^{ik} = \varepsilon_{ikm}\,\varepsilon^{ikn}\Omega^{*m}\Omega_{*n} = 2\Omega_{*i}\Omega^{*i}, \tag{4.90}$$

$$J_2 = A_{\alpha\beta}A^{*\alpha\beta} = 0\,. \tag{4.91}$$

Таким образом, скалярный инвариант $J_1 = 2\Omega_{*i}\Omega^{*i}$ всегда отличен от нуля, т.к. в противном случае пространство являлось бы голономным (не вращалось) и спин-взаимодействие отсутствовало бы.

Теперь приступим к исследованию физических условий движения элементарных частиц со спином.

Используя определение хронометрически инвариантного вектора гравитационно-инерциальной силы

$$F_i = \frac{1}{1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}}\left(\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^i} - \frac{\partial v_i}{\partial t}\right) = -\,c^2\,\frac{\partial \ln\!\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)}{\partial x^i} - \frac{{}^*\partial v_i}{\partial t}\,, \tag{4.92}$$

выразим тензор неголономности A_{ik} (1.36) через гравитационный потенциал и скорость вращения пространства

$$A_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{{}^*\partial v_k}{\partial x^i} - \frac{{}^*\partial v_i}{\partial x^k}\right) + v_i\,\frac{\partial \ln\sqrt{1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}}}{\partial x^k} - v_k\,\frac{\partial \ln\sqrt{1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}}}{\partial x^i}\,. \tag{4.93}$$

Отсюда видно, что тензор неголономности A_{ik} представляет собой трехмерный наблюдаемый вихрь линейной скорости вращения

пространства с двумя добавочными членами, созданными взаимодействием поля гравитационного потенциала w и поля вращения пространства.

Вместе с тем спин-взаимодействие, из-за малости абсолютного значения постоянной Планка, сказывается лишь на движении элементарных частиц. Причем в масштабах столь малых масс и расстояний, как известно, интенсивность гравитационного взаимодействия на несколько порядков слабее электромагнитного, слабого (спинового) и сильного взаимодействий. Учитывая это обстоятельство, можно считать, что при спин-взаимодействии в выражении для тензора неголономности A_{ik} (4.93) гравитационный потенциал $\mathrm{w} \to 0$. Тогда в масштабах элементарных частиц A_{ik} представляет собой наблюдаемый вихрь (ротор) в "чистом" виде

$$A_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{{}^*\partial v_k}{\partial x^i} - \frac{{}^*\partial v_i}{\partial x^k}\right), \qquad (4.94)$$

а в векторе гравитационно-инерциальной силы (4.92) остается лишь инерциальная (кориолисова) часть

$$F_i = -\frac{{}^*\partial v_i}{\partial t} = -\frac{1}{1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}}\frac{\partial v_i}{\partial t} = -\frac{\partial v_i}{\partial t}\,. \qquad (4.95)$$

Тождества Зельманова [9, 11–13], связывающие гравитационно-инерциальную силу и вращение пространства

$$\frac{2}{\sqrt{h}}\frac{{}^*\partial}{\partial t}\left(\sqrt{h}\,\Omega^{*i}\right) + \varepsilon^{ijk}\,{}^*\nabla_j F_k = 0\,, \qquad {}^*\nabla_k\,\Omega^{*k} + \frac{1}{c^2}\,F_k\Omega^{*k} = 0\,, \quad (4.96)$$

для элементарных частиц ($\mathrm{w} \to 0$) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{h}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{h}\,\Omega^{*i}\right) + \frac{1}{2}\,\varepsilon^{ijk}\left(\frac{{}^*\partial^2 v_k}{\partial x^j\partial t} - \frac{{}^*\partial^2 v_j}{\partial x^k\partial t}\right) = 0 \\ &{}^*\nabla_k\,\Omega^{*k} - \frac{1}{c^2}\frac{{}^*\partial v_k}{\partial t}\,\Omega^{*k} = 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (4.97)$$

Если подставить сюда $\frac{{}^*\partial v_k}{\partial t} = 0$, т.е. предположить, что наблюдаемое вращение пространства является стационарным, то мы получим ${}^*\nabla_k\,\Omega^{*k} = 0$, т.е. псевдовектор угловой скорости вращения пространства будет сохраняться. Это означает отсутствие "токов" поля вращения. Тогда первое (векторное) тождество примет вид

$$\Omega^{*i}D + \frac{{}^*\partial\Omega^{*i}}{\partial t} = 0\,, \qquad (4.98)$$

откуда следует, что величина $D = \det\|D_n^n\| = \frac{^*\partial \ln\sqrt{h}}{\partial t}$, т.е. скорость относительного расширения элементарного объема пространства, равна нулю $D = 0$.

Таким образом, из этих тождеств следует, что для элементарных частиц (т.е. с $\mathrm{w} \to 0$) при стационарном вращении пространства $\frac{^*\partial v_k}{\partial t} = 0$ тензор угловых скоростей этого вращения сохраняется $^*\nabla_k\, \Omega^{*k} = 0$ и относительное расширение (деформация) пространства отсутствует $D = 0$.

Вполне возможно, что стационарный характер поля неголономности пространства (как внешнего поля в спин-взаимодействии) является необходимым условием стабильности элементарной частицы. Исходя из этого можно сделать вывод, что долгоживущие частицы со спином должны обладать устойчивым внутренним вращением, тогда как короткоживущие элементарные частицы должны представлять собой вихри.

Расчет движений короткоживущих частиц представляет собой значительные трудности, т.к. мы не располагаем экспериментальными данными о структуре вихрей, которые могут их породить. В то же время расчет для долгоживущих частиц, т.е. в безвихревом внешнем поле (стационарное вращение пространства), позволяет получить точные решения уравнений их движения. Более подробно мы рассмотрим эти вопросы в следующем параграфе.

§4.5 Движение элементарных частиц со спином

Как мы уже упоминали, постоянная Планка из-за малости своего абсолютного значения сказывается лишь в масштабах элементарных частиц, когда гравитационное взаимодействие на несколько порядков слабее электромагнитного, слабого и сильного взаимодействий. Поэтому, полагая гравитационный потенциал $\mathrm{w} \to 0$ в уравнениях движения частиц со спином (4.70–4.73) и (4.82–4.85), мы автоматически получаем уравнения движения элементарных частиц.

При этом, как мы выяснили в предыдущем параграфе, при стационарном вращении пространства $\frac{^*\partial v_k}{\partial t} = 0$, в масштабах элементарных частиц след тензора скоростей деформации пространства равен нулю $D = 0$. Конечно, из равенства нулю следа какого-либо тензора вовсе не следует, что сам тензор тоже равен нулю. Вместе с тем деформация пространства — явление редкое и в исследованиях движения элементарных частиц мы будем полагать $D_{ik} = 0$.

Кроме того, в третьем параграфе было показано, что при стационарном вращении пространства условие сохранения спин-импульса

частицы S^α принимает вид (4.68)

$$n\hbar^{mn}\varepsilon_{imn}\mathrm{v}^k\frac{1}{\sqrt{h}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{h}\,\Omega^{*i}\right)=0\,. \tag{4.99}$$

С другой стороны, при $\frac{{}^*\partial v_k}{\partial t}=0$ из тождеств Зельманова (4.97) следует

$${}^*\nabla_k\,\Omega^{*k}=\frac{\partial\Omega^{*k}}{\partial x^k}+\frac{\partial\sqrt{h}}{\partial x^k}\,\Omega^{*k}=\frac{1}{\sqrt{h}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{h}\,\Omega^{*k}\right)=0\,. \tag{4.100}$$

Первое условие выполняется, когда $\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{h}\,\Omega^{*k})=0$. Оно имеет место, если псевдовектор угловой скорости вращения пространства имеет вид

$$\Omega^{*i}=\frac{\Omega^{*i}_{(0)}}{\sqrt{h}}\,,\qquad \Omega^{*i}_{(0)}=const\,, \tag{4.101}$$

при этом выполняется и второе условие (4.100).

Учитывая сказанное, из выражений (4.70, 4.71) получаем хронометрически инвариантные уравнения движения для массовой элементарной частицы нашего мира, движущейся относительно наблюдателя в будущее (прямой ход времени)

$$\frac{dm}{d\tau}=-\frac{1}{c^2}\frac{d\eta}{d\tau}\,, \tag{4.102}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}\left(m\mathrm{v}^i\right)+2mA_{k\cdot}^{\cdot i}\mathrm{v}^k+m\Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k&=\\=-\frac{1}{c^2}\frac{d}{d\tau}\left(\eta\mathrm{v}^i\right)-\frac{2\eta}{c^2}\,A_{k\cdot}^{\cdot i}\mathrm{v}^k-\frac{\eta}{c^2}\,\Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k,\end{aligned} \tag{4.103}$$

и из (4.72, 4.73) получаем для массовой элементарной частицы зазеркалья, движущейся в прошлое (обратный ход времени),

$$-\frac{dm}{d\tau}=\frac{1}{c^2}\frac{d\eta}{d\tau}\,, \tag{4.104}$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(m\mathrm{v}^i\right)+m\Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k=-\frac{1}{c^2}\frac{d}{d\tau}\left(\eta\mathrm{v}^i\right)-\frac{\eta}{c^2}\,\Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k. \tag{4.105}$$

При этом скалярные уравнения движения (временные проекции) получаются одинаковыми как для массовых частиц нашего мира, так и для частиц зазеркалья. При интегрировании скалярного уравнения движения в случае прямого хода времени

$$\int_{\tau_1=0}^{\tau_2}\frac{d}{d\tau}\left(m+\frac{\eta}{c^2}\right)d\tau=0\,, \tag{4.106}$$

получаем

$$m + \frac{\eta}{c^2} = const = B\,, \tag{4.107}$$

где B постоянная интегрирования, значение которой можно определить из начальных условий.

Чтобы понять физический смысл полученного интеграла “живых сил”, проведем аналогию между наблюдаемыми компонентами четырехмерного вектора импульса частицы $P^{\alpha} = m_0 \frac{dx^{\alpha}}{ds}$ и четырехмерного спин-импульса $S^{\alpha} = \frac{\eta_0}{c^2}\frac{dx^{\alpha}}{ds}$ (они оба касательны к мировой линии частицы). Их наблюдаемые компоненты имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{P_0}{\sqrt{g_{00}}} = \pm\, m\,, \qquad P^i = \frac{1}{c}\, m\mathrm{v}^i = \frac{1}{c}\, p^i \\ &\frac{S_0}{\sqrt{g_{00}}} = \pm\, \frac{1}{c^2}\,\eta\,, \qquad S^i = \frac{1}{c^3}\,\eta\mathrm{v}^i \end{aligned}\right\}. \tag{4.108}$$

По аналогии с релятивистской массой частицы $\pm m$ назовем величину $\pm\frac{1}{c^2}\eta$ релятивистской *спин-массой*. Тогда $\frac{1}{c^2}\eta_0$ есть спин-масса покоя частицы. Из теоремы живых сил для элементарной частицы со спином (4.107) следует, что (при сделанных предположениях) сумма релятивистской массы частицы и ее спин-массы сохраняется вдоль траектории движения.

Теперь, используя интеграл живых сил (решение скалярного уравнения движения), приступим к решению векторных уравнений движения элементарной массовой частицы нашего мира (4.103). Подставляя (4.107) в векторные уравнения движения (4.103), после сокращения на константу получаем

$$\frac{d\mathrm{v}^i}{d\tau} + 2A_{k\cdot}^{\cdot i}\mathrm{v}^k + \Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k = 0\,, \tag{4.109}$$

т.е. чисто кинематические уравнения движения (в данном случае, негеодезического). Член $\Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k$, представляющий собой свертку хронометрически инвариантных символов Кристоффеля с наблюдаемой скоростью частицы, является пренебрежимо малым, если вдоль траектории частицы наблюдаемая пространственная метрика $h_{ik} = -\,g_{ik} + \frac{1}{c^2}v_i v_k$ близка к евклидовой. Такое возможно, когда скорость вращения пространства много меньше скорости света, а трехмерная координатная метрика g_{ik} является евклидовой. Тогда диагональные компоненты наблюдаемого метрического тензора имеют значения

$$h_{11} = h_{22} = h_{33} = +1\,, \tag{4.110}$$

а его остальные компоненты $h_{ik}=0$, если $i\neq k$. Причем четырехмерная метрика в этом случае не может быть галилеевой из-за того, что трехмерное пространство вращается относительно времени. Иначе говоря, хотя трехмерное пространство в данном случае является плоским евклидовым, четырехмерное пространство-время не является плоским пространством Минковского, а представляет собой псевдориманово пространство с метрикой

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{00}\,dx^0dx^0 + 2g_{0i}\,dx^0dx^i + g_{ik}\,dx^idx^k = \\ &= c^2dt^2 + 2g_{0i}\,c\,dt\,dx^i - \left(dx^1\right)^2 - \left(dx^2\right)^2 - \left(dx^3\right)^2. \end{aligned} \qquad (4.111)$$

Пусть вращение пространства происходит с постоянной угловой скоростью $\Omega=const$ относительно лишь одной из осей, например, вокруг оси x^3. Тогда линейная скорость пространства отсчета $v_i=\Omega_{ik}x^k$ принимает вид

$$v_1 = \Omega_{12}x^2 = \Omega\,y\,, \qquad v_2 = \Omega_{21}x^1 = -\Omega\,x\,, \qquad (4.112)$$

где $A_{ik}=\Omega_{ik}$. Тогда у тензора неголономности A_{ik} отличны от нуля только компоненты

$$A_{12} = -A_{21} = -\,\Omega\,. \qquad (4.113)$$

С учетом этого векторные уравнения движения элементарной частицы нашего мира (4.109) принимают вид

$$\frac{d\mathrm{v}^1}{d\tau} + 2\Omega\mathrm{v}^2 = 0\,, \qquad \frac{d\mathrm{v}^2}{d\tau} - 2\Omega\mathrm{v}^1 = 0\,, \qquad \frac{d\mathrm{v}^3}{d\tau} = 0\,. \qquad (4.114)$$

Решение третьего уравнения легко записать сразу

$$\mathrm{v}^3 = \mathrm{v}^3_{(0)} = const. \qquad (4.115)$$

Учитывая, что $\mathrm{v}^3 = \frac{dx^3}{d\tau}$, запишем координату x^3 в виде

$$x^3 = \mathrm{v}^3_{(0)}\tau + x^3_{(0)}\,, \qquad (4.116)$$

где $x^3_{(0)}$ значение координаты x^3 в начальный момент времени $\tau=0$. Теперь выразим v^2 из первого уравнения (4.114)

$$\mathrm{v}^2 = -\frac{1}{2\Omega}\frac{d\mathrm{v}^1}{d\tau}\,, \qquad (4.117)$$

продифференцируем полученное выражение по $d\tau$

$$\frac{d\mathrm{v}^2}{d\tau} = -\frac{1}{2\Omega}\frac{d^2\mathrm{v}^1}{d\tau^2}\,, \qquad (4.118)$$

и, подставив его во второе уравнение (4.114), получаем

$$\frac{d^2\mathrm{v}^1}{d\tau^2} + 4\Omega^2\mathrm{v}^1 = 0\,, \tag{4.119}$$

т.е. уравнение свободных колебаний. Его решение имеет вид

$$\mathrm{v}^1 = C_1\cos(2\Omega\tau) + C_2\sin(2\Omega\tau)\,, \tag{4.120}$$

где C_1 и C_2 константы интегрирования (4.119), значения которых можно получить из условий в момент $\tau = 0$

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{v}^1_{(0)} = C_1 \\ &\left.\frac{d\mathrm{v}^1}{d\tau}\right|_{\tau=0} = -2\Omega C_1\sin(2\Omega\tau)|_{\tau=0} + 2\Omega C_2\cos(2\Omega\tau)|_{\tau=0} \end{aligned}\right\}. \tag{4.121}$$

Таким образом, $C_1 = \mathrm{v}^1_{(0)}$, $C_2 = \frac{\dot{\mathrm{v}}^1_{(0)}}{2\Omega}$, где $\dot{\mathrm{v}}^1_{(0)} = \frac{d\mathrm{v}^1}{d\tau}\big|_{\tau=0}$. Тогда решение уравнения для v^1 принимает окончательный вид

$$\mathrm{v}^1 = \mathrm{v}^1_{(0)}\cos(2\Omega\tau) + \frac{\dot{\mathrm{v}}^1_{(0)}}{2\Omega}\sin(2\Omega\tau)\,, \tag{4.122}$$

т.е. скорость элементарной частицы в направлении x^1 испытывает синусоидальные колебания с частотой, равной удвоенной угловой скорости вращения пространства.

Учитывая, что $\mathrm{v}^1 = \frac{dx^1}{d\tau}$, проинтегрируем полученное уравнение (4.122) по $d\tau$. В результате получаем

$$x^1 = \frac{\mathrm{v}^1_{(0)}}{2\Omega}\sin(2\Omega\tau) - \frac{\dot{\mathrm{v}}^1_{(0)}}{4\Omega^2}\cos(2\Omega\tau) + C_3\,. \tag{4.123}$$

Полагая, что в начальный момент $\tau = 0$ величина $x^1 = x^1_{(0)}$, находим постоянную интегрирования $C_3 = x^1_{(0)} + \frac{\dot{\mathrm{v}}^1_{(0)}}{4\Omega^2}$. Тогда для координаты x^1 элементарной частицы имеем

$$x^1 = \frac{\mathrm{v}^1_{(0)}}{2\Omega}\sin(2\Omega\tau) - \frac{\dot{\mathrm{v}}^1_{(0)}}{4\Omega^2}\cos(2\Omega\tau) + x^1_0 + \frac{\dot{\mathrm{v}}^1_{(0)}}{4\Omega^2}\,, \tag{4.124}$$

т.е. координата x^1 элементарной частицы также испытывает свободные колебания с частотой, равной 2Ω.

Теперь, подставляя во второе уравнение движения (4.114) полученную величину v^1 (4.122), находим выражение

$$\frac{d\mathrm{v}^2}{d\tau} = 2\Omega\mathrm{v}^1_{(0)}\cos(2\Omega\tau) + \dot{\mathrm{v}}^1_{(0)}\sin(2\Omega\tau)\,, \tag{4.125}$$

интегрирование которого дает v^2

$$\mathrm{v}^2 = \mathrm{v}^1_{(0)} \sin(2\Omega\tau) - \frac{\dot{\mathrm{v}}^1_{(0)}}{2\Omega} \cos(2\Omega\tau) + C_4\,. \qquad (4.126)$$

Полагая, что в начальный момент $\tau = 0$ скорость $\mathrm{v}^2 = \mathrm{v}^2_{(0)}$, находим постоянную интегрирования $C_3 = \mathrm{v}^2_{(0)} + \frac{\dot{\mathrm{v}}^1_{(0)}}{2\Omega}$. Тогда

$$\mathrm{v}^2 = \mathrm{v}^1_{(0)} \sin(2\Omega\tau) - \frac{\dot{\mathrm{v}}^1_{(0)}}{2\Omega} \cos(2\Omega\tau) + \mathrm{v}^2_{(0)} + \frac{\dot{\mathrm{v}}^1_{(0)}}{2\Omega}\,. \qquad (4.127)$$

Учитывая, что $\mathrm{v}^2 = \frac{dx^2}{d\tau}$, проинтегрируем это выражение по $d\tau$. В результате получаем выражение для координаты x^2 элементарной частицы

$$x^2 = -\frac{\dot{\mathrm{v}}^1_{(0)}}{4\Omega^2} \sin(2\Omega\tau) - \frac{\mathrm{v}^1_{(0)}}{2\Omega} \cos(2\Omega\tau) + \mathrm{v}^2_{(0)}\tau + \frac{\dot{\mathrm{v}}^1_{(0)}\tau}{2\Omega} + C_5\,. \quad (4.128)$$

Постоянная интегрирования находится из начальных условий $x^2 = x^2_{(0)}$ при $\tau = 0$ и равна $C_5 = x^2_{(0)} + \frac{\mathrm{v}^1_{(0)}}{2\Omega}$. Тогда окончательно выражение для координаты x^2 принимает вид

$$x^2 = \mathrm{v}^2_{(0)}\tau + \frac{\dot{\mathrm{v}}^1_{(0)}\tau}{2\Omega} - \frac{\dot{\mathrm{v}}^1_{(0)}}{4\Omega^2} \sin(2\Omega\tau) - \frac{\mathrm{v}^1_{(0)}}{2\Omega} \cos(2\Omega\tau) + x^2_{(0)} + \frac{\mathrm{v}^1_{(0)}}{2\Omega}\,. \qquad (4.129)$$

Из этого выражения следует: если в начальный момент наблюдаемого времени $\tau = 0$ элементарная частица обладала скоростью $\mathrm{v}^2_{(0)}$ в направлении x^2 и с ускорением $\dot{\mathrm{v}}^1_{(0)}$ в направлении x^1, то эта частица, наряду со свободными колебаниями координаты x^2 с частотой, равной удвоенной угловой скорости вращения пространства Ω, испытывает линейное смещение вдоль оси x^2 на величину $\Delta x^2 = \mathrm{v}^2_{(0)}\tau + \frac{\dot{\mathrm{v}}^1_{(0)}\tau}{2\Omega}$.

Теперь, возвращаясь к интегралу живых сил (решению скалярного уравнения движения) для элементарной частицы со спином $m + \frac{\eta}{c^2} = B = const$ (4.107), можно вычислить постоянную интегрирования B. Из (4.107), записанного в виде

$$m_0 + \frac{\eta_0}{c^2} = B\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}\,, \qquad (4.130)$$

следует, что квадрат физической наблюдаемой скорости частицы $(\mathrm{v})^2 = const$. Так как компоненты наблюдаемой скорости элементар-

ной частицы уже получены, можно записать выражение для ее квадрата, которое из-за того, что рассматриваемая трехмерная метрика является евклидовой, принимает вид

$$\begin{gathered}\left[\mathrm{v}^1\right]^2+\left[\mathrm{v}^2\right]^2+\left[\mathrm{v}^3\right]^2=\left[\mathrm{v}^1_{(0)}\right]^2+\left[\mathrm{v}^2_{(0)}\right]^2+\left[\mathrm{v}^3_{(0)}\right]^2+\frac{\left[\dot{\mathrm{v}}^1_{(0)}\right]^2}{2\Omega^2}+\\+\frac{\dot{\mathrm{v}}^1_{(0)}\dot{\mathrm{v}}^2_{(0)}}{\Omega}+2\left[\mathrm{v}^2_{(0)}+\frac{\dot{\mathrm{v}}^1_{(0)}}{2\Omega}\right]\left[\mathrm{v}^1_{(0)}\sin\left(2\Omega\tau\right)-\frac{\dot{\mathrm{v}}^1_{(0)}}{2\Omega}\cos\left(2\Omega\tau\right)\right].\end{gathered}\tag{4.131}$$

Отсюда видно, что квадрат скорости частицы сохраняется, если $\dot{\mathrm{v}}^2_{(0)}=0$ и $\dot{\mathrm{v}}^1_{(0)}=0$. Тогда постоянная интегрирования B из интеграла живых сил равна

$$B=\frac{m_0+\frac{\eta_0}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2_{(0)}}{c^2}}}\,,\qquad \left[\mathrm{v}^2_{(0)}\right]^2=\left[\mathrm{v}^1_{(0)}\right]^2+\left[\mathrm{v}^3_{(0)}\right]^2=const\,,\tag{4.132}$$

а собственно интеграл живых сил (4.107) принимает вид

$$m+\frac{\eta}{c^2}=\frac{m_0+\frac{\eta_0}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2_{(0)}}{c^2}}}\,,\tag{4.133}$$

т.е. представляет собой условие сохранения суммы релятивистской массы частицы m и ее спин-массы $\frac{\eta}{c^2}$.

Здесь следует сделать одно замечание, касающееся всего сказанного о движении элементарных частиц. Учитывая в выражении $\eta_0=n\hbar^{mn}A_{mn}$, что $A_{mn}=\varepsilon_{mnk}\Omega^{*k}$, мы получаем

$$\eta_0=n\hbar^{mn}A_{mn}=2n\hbar_{*k}\Omega^{*k},\tag{4.134}$$

где $\hbar_{*k}=\frac{1}{2}\,\varepsilon_{nmk}\hbar^{mn}$. Формально $\hbar_{*k}$ представляет собой трехмерный псевдовектор внутреннего момента элементарной частицы. Таким образом, величина η_0 есть скалярное произведение двух трехмерных хронометрически инвариантных (наблюдаемых) псевдовекторов: внутреннего момента частицы $\hbar_{*k}$ и угловой скорости вращения пространства Ω^{*k}. Следовательно, спин-взаимодействие отсутствует, если псевдовекторы внутреннего вращения частицы и взаимодействующего с ним поля внешнего вращения пространства наблюдаются коллинеарными.

Теперь вновь вернемся к уравнениям движения элементарных частиц со спином. С учетом констант интегрирования решения век-

торных уравнений движения принимают вид

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{v}^1 = \mathrm{v}^1_{(0)}\cos(2\Omega\tau)\,, \quad x^1 = \frac{\mathrm{v}^1_{(0)}}{2\Omega}\sin(2\Omega\tau) + x^1_{(0)} \\ &\mathrm{v}^2 = \mathrm{v}^2_{(0)}\sin(2\Omega\tau)\,, \quad x^2 = -\frac{\mathrm{v}^1_{(0)}}{2\Omega}\cos(2\Omega\tau) + \frac{\mathrm{v}^1_{(0)}}{2\Omega} + x^2_{(0)} \\ &\mathrm{v}^3 = \mathrm{v}^3_{(0)}, \qquad\qquad\quad x^3 = \mathrm{v}^3_{(0)}\tau + x^3_{(0)} \end{aligned}\right\}. \tag{4.135}$$

Исследуем форму пространственной (трехмерной) кривой, вдоль которой движется массовая элементарная частица нашего мира. Выберем такой отсчет координат, чтобы начальное смещение частицы было равно нулю $x^1_{(0)} = x^2_{(0)} = x^3_{(0)} = 0$. Тогда ее пространственные координаты в произвольный момент времени будут иметь вид

$$x^1 = x = a\sin(2\Omega\tau)\,, \quad x^2 = y = a\big[1 - \cos(2\Omega\tau)\big], \quad x^3 = z = b\tau\,, \tag{4.136}$$

где $a = \frac{\mathrm{v}^1_{(0)}}{2\Omega}$, $b = \mathrm{v}^3_{(0)}$. Полученные решения для координат представляют собой параметрические уравнения поверхности, по которой движется элементарная массовая частица. Чтобы наглядно представить себе эту поверхность, перейдем от параметрической формы записи к координатной, исключив из уравнений параметр τ. Возводя выражения для координат x и y в квадрат, получаем

$$x^2 + y^2 = 2a^2\big[1 - \cos(2\Omega\tau)\big] = 4a^2\sin^2(\Omega\tau) = 4a^2\sin^2\frac{z\Omega}{b}\,. \tag{4.137}$$

Полученный результат напоминает уравнение винтовой линии $x^2 + y^2 = a^2$, $z = b\tau$, но лишь отчасти. Можно сказать, что частица движется по поверхности цилиндра с постоянной скоростью $b = \mathrm{v}^3_{(0)}$ вдоль его оси z, причем радиус этого цилиндра пульсирует с частотой Ω в пределах от нуля (при $z = \frac{\pi k b}{2\Omega}$) до ее наибольшего значения $2a = \frac{\mathrm{v}^1_{(0)}}{\Omega}$ (при $z = \frac{\pi k b}{\Omega}$).*

Итак, траектория массовой элементарной частицы нашего мира напоминает винтовую линию, "намотанную" на пульсирующий цилиндр. Время жизни частицы — длина этого цилиндра, отнесенная к ее скорости вдоль оси z (оси цилиндра). Пульсации цилиндра — энергетические "вдохи" и "выдохи" частицы. Это означает, что полученный нами цилиндр представляет собой *цилиндр событий* частицы от ее рождения в нашем мире (акта материализации) до ее

*Здесь $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Если $\mathrm{v}^3_{(0)} = 0$, частица просто колеблется в плоскости xy (плоскости сечения цилиндра).

смерти (дематериализации). Впрочем, даже после смерти (распада) элементарной частицы цилиндр событий не прекращает своего существования полностью, а лишь *расщепляется* на несколько цилиндров событий других элементарных частиц — продуктов распада (как в нашем мире, так и в зазеркалье).

Поэтому корректное исследование процессов рождения и распада элементарных частиц в Общей Теории Относительности сводится к рассмотрению участков разветвления цилиндров событий с учетом возможных ответвлений, ведущих в зазеркалье.

Если же рассматривать движение двух связанных элементарных частиц со спином, вращающихся вокруг общего центра масс, например, позитрония (гантелеподобной связанной системы из электрона и позитрона), то мы получим двойную спираль наподобие спирали ДНК — закрученную “веревочную лестницу” со множеством перекладинок (связи частиц), навитую на пульсирующий цилиндр событий.

Теперь получим решение уравнений движения массовой элементарной частицы со спином в зазеркалье — мире с обратным ходом времени. При рассматриваемых нами физических условиях (стационарное вращение пространства с малой скоростью, отсутствие деформации и евклидовость трехмерной метрики), эти уравнения (4.104, 4.105) принимают вид

$$-\frac{dm}{d\tau}=\frac{1}{c^2}\frac{d\eta}{d\tau}\,, \tag{4.138}$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(m\mathrm{v}^i\right)=-\frac{1}{c^2}\frac{d}{d\tau}\left(\eta\mathrm{v}^i\right). \tag{4.139}$$

Решением скалярного уравнения движения является интеграл живых сил $m+\frac{\eta}{c^2}=B=const$, как и для частицы нашего мира (4.107). Подставляя его в векторные уравнения движения (4.139), получаем их решение

$$\frac{d\mathrm{v}^i}{d\tau}=0\,, \tag{4.140}$$

следовательно $\mathrm{v}^i=\mathrm{v}^i_{(0)}=const$. Это означает, что с точки зрения обычного наблюдателя элементарные массовые частицы зазеркалья движутся прямолинейно с постоянной скоростью, в отличии от наблюдаемого движения частиц нашего мира, описывающих пульсирующую “винтовую” линию.

Вместе с тем, с точки зрения гипотетического наблюдателя, находящегося в зазеркалье, наоборот, движение частиц нашего мира

будет прямолинейным и равномерным, тогда как частицы зазеркалья будут описывать пульсирующие "винтовые" линии.

Таким же образом можно было бы и рассчитать и движение безмассовых (светоподобных) элементарных частиц со спином, но мы не знаем, насколько законным в этом случае было бы наше предположение о том, что линейная скорость вращения пространства отсчета много меньше скорости света. А между тем, именно предположение о малости скорости вращения пространства позволило нам получить точное решение уравнений движения массовых элементарных частиц. Хотя вообще методы исследования уравнений движения массовых и безмассовых элементарных частиц не отличаются.

§4.6 Частица со спином в электромагнитном поле

В этом параграфе мы выведем и исследуем хронометрически инвариантные динамические уравнения движения частицы, обладающей электрическим зарядом и спином, движущейся во внешнем электромагнитном поле в четырехмерном псевдоримановом пространстве.

Метод вывода — проецирование на время и на пространство общековариантных уравнений параллельного переноса вдоль четырехмерной траектории суммарного вектора

$$Q^{\alpha} = P^{\alpha} + \frac{e}{c^2}\,A^{\alpha} + S^{\alpha}, \tag{4.141}$$

где P^{α} четырехмерный вектор импульса частицы, движущейся в данном случае вдоль негеодезической траектории. Соответственно, остальные два члена — это четырехмерный импульс, приобретаемый частицей из-за взаимодействия ее заряда с электромагнитным полем, и импульс, приобретаемый частицей за счет взаимодействия ее спина с полем неголономности пространства. Причем, т.к. векторы P^{α} и S^{α} направлены по касательной к четырехмерной траектории (мировой линии) частицы, мы положим, что третий вектор A^{α} (четырехмерный потенциал электромагнитного поля) тоже касателен к мировой линии частицы. В этом случае его структура имеет вид $A^{\alpha} = \varphi_0 \frac{dx^{\alpha}}{ds}$, при этом соотношение $q^i = \frac{\varphi}{c}\,\mathrm{v}^i$ (см. §3.8) устанавливает связь между скалярным потенциалом φ и вектор-потенциалом q^i электромагнитного поля.

Тогда физические наблюдаемые компоненты $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{q}^i$ суммарного вектора частицы с зарядом и спином, представляющие собой суммы аналогичных компонент всех трех слагаемых векторов, принимают

следующий вид

$$\tilde{\varphi} = \pm\left(m + \frac{e\varphi}{c^2} + \frac{\eta}{c^2}\right), \quad \tilde{q}^i = \frac{1}{c^2}\,m\mathrm{v}^i + \frac{1}{c^3}\,(\eta + e\varphi)\,\mathrm{v}^i, \qquad (4.142)$$

где m релятивистская масса частицы, φ скалярный потенциал электромагнитного поля, а величина η характеризует взаимодействие спина частицы с внешним полем неголономности пространства

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\,, \qquad \varphi = \frac{\varphi_0}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\,, \qquad \eta = \frac{\eta_0}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\,. \qquad (4.143)$$

Вообще вывод этих уравнений ничем не отличается от вывода уравнений движения отдельно для заряженной частицы и отдельно для частицы со спином, только сейчас нам предстоит проецировать абсолютную производную суммы трех векторов. Используя выражения для $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{q}^i$ (4.142), получаем хронометрически инвариантные уравнения движения массовой заряженной частицы со спином, движущейся в нашем мире (из прошлого в будущее)

$$\begin{aligned} &\frac{dm}{d\tau} - \frac{m}{c^2}\,F_i\mathrm{v}^i + \frac{m}{c^2}\,D_{ik}\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k = \\ &\quad = -\frac{1}{c^2}\frac{d}{d\tau}\,(\eta + e\varphi) + \frac{\eta + e\varphi}{c^4}\,F_i\mathrm{v}^i - \frac{\eta + e\varphi}{c^4}\,D_{ik}\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k, \end{aligned} \qquad (4.144)$$

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\tau}\left(m\mathrm{v}^i\right) + 2m\left(D^i_k + A^{\cdot i}_{k\cdot}\right)\mathrm{v}^k - mF^i + m\Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k = \\ &\quad = -\frac{1}{c^2}\frac{d}{d\tau}\left[(\eta + e\varphi)\,\mathrm{v}^i\right] - \frac{2\,(\eta + e\varphi)}{c^2}\left(D^i_k + A^{\cdot i}_{k\cdot}\right)\mathrm{v}^k + \\ &\qquad + \frac{\eta + e\varphi}{c^2}\,F^i - \frac{\eta + e\varphi}{c^2}\,\Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k, \end{aligned} \qquad (4.145)$$

и уравнения движения массовой частицы с зарядом и спином, движущейся в зазеркалье (т.е. из будущего в прошлое)

$$\begin{aligned} &-\frac{dm}{d\tau} - \frac{m}{c^2}\,F_i\mathrm{v}^i + \frac{m}{c^2}\,D_{ik}\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k = \\ &\quad = \frac{1}{c^2}\frac{d}{d\tau}\,(\eta + e\varphi) + \frac{\eta + e\varphi}{c^4}\,F_i\mathrm{v}^i - \frac{\eta + e\varphi}{c^4}\,D_{ik}\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k, \end{aligned} \qquad (4.146)$$

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\tau}\left(m\mathrm{v}^i\right) + mF^i + m\Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k = \\ &\quad = -\frac{1}{c^2}\frac{d}{d\tau}\left[(\eta + e\varphi)\,\mathrm{v}^i\right] - \frac{\eta + e\varphi}{c^2}F^i - \frac{\eta + e\varphi}{c^2}\,\Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k. \end{aligned} \qquad (4.147)$$

При параллельном переносе в римановом пространстве длина переносимого вектора сохраняется. Следовательно, его квадрат является инвариантом в любой системе отсчета. В том числе, в сопутствующей системе отсчета, где он имеет вид

$$Q_\alpha Q^\alpha = g_{\alpha\beta}\left(P^\alpha + \frac{e}{c^2}A^\alpha + S^\alpha\right)\left(P^\beta + \frac{e}{c^2}A^\beta + S^\beta\right) = \\ = g_{\alpha\beta}\left(m_0 + \frac{e\varphi_0}{c^2} + \frac{\eta_0}{c^2}\right)^2 \frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = \left(m_0 + \frac{e\varphi_0}{c^2} + \frac{\eta_0}{c^2}\right)^2. \tag{4.148}$$

В §3.9 мы уже показали, что при ориентации четырехмерного электромагнитного потенциала A^α вдоль мировой линии частицы правые части хронометрически инвариантных уравнений движения заряженной частицы существенно упрощаются: правая часть векторных уравнений движения представляет собой хронометрически инвариантную силу Лоренца $\Phi^i = -e\left(E^i + \frac{1}{c}\varepsilon^{ikm}\mathrm{v}_k H_{*m}\right)$, а правая часть скалярного уравнения — скалярное произведение вектора напряженности электрического поля E_i и хронометрически инвариантной скорости движения частицы. Учитывая это, запишем хронометрически инвариантные уравнения движения массовой заряженной частицы со спином (4.144–4.147) при ее движении в нашем мире, т.е. из прошлого в будущее (прямой ход времени),

$$\frac{d}{d\tau}\left(m + \frac{\eta}{c^2}\right) - \frac{1}{c^2}\left(m + \frac{\eta}{c^2}\right)F_i\mathrm{v}^i + \\ + \frac{1}{c^2}\left(m + \frac{\eta}{c^2}\right)D_{ik}\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k = -\frac{e}{c^2}E_i\mathrm{v}^i, \tag{4.149}$$

$$\frac{d}{d\tau}\left[\left(m + \frac{\eta}{c^2}\right)\mathrm{v}^i\right] + 2\left(m + \frac{\eta}{c^2}\right)\left(D^i_k + A^{\cdot i}_{k\cdot}\right)\mathrm{v}^k - \left(m + \frac{\eta}{c^2}\right)F^i + \\ + \left(m + \frac{\eta}{c^2}\right)\Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k = -e\left(E^i + \frac{1}{c}\varepsilon^{ikm}\mathrm{v}_k H_{*m}\right) \tag{4.150}$$

и при ее движении в зазеркалье, из будущего в прошлое (обратный ход времени)

$$-\frac{d}{d\tau}\left(m + \frac{\eta}{c^2}\right) - \frac{1}{c^2}\left(m + \frac{\eta}{c^2}\right)F_i\mathrm{v}^i + \\ + \frac{1}{c^2}\left(m + \frac{\eta}{c^2}\right)D_{ik}\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k = -\frac{e}{c^2}E_i\mathrm{v}^i, \tag{4.151}$$

$$\frac{d}{d\tau}\left[\left(m + \frac{\eta}{c^2}\right)\mathrm{v}^i\right] + \left(m + \frac{\eta}{c^2}\right)F^i + \left(m + \frac{\eta}{c^2}\right)\Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k = \\ = -e\left(E^i + \frac{1}{c}\varepsilon^{ikm}\mathrm{v}_k H_{*m}\right). \tag{4.152}$$

Теперь, чтобы получить конкретные выводы о движении элементарных частиц с электрическим зарядом и спином в псевдоримановом пространстве, нам необходимо задать конкретную геометрическую структуру этого пространства. Как и в предыдущем параграфе, когда мы исследовали движение незаряженных элементарных частиц, будем полагать, что:

1) гравитационное взаимодействие в масштабах элементарных частиц пренебрежимо мало, т.е. потенциал $\mathrm{w}\to 0$;
2) пространство вращается стационарно, т.е. $\frac{^*\partial v_k}{\partial t}=0$;
3) пространство не деформируется, т.е. $D_{ik}=0$;
4) трехмерная координатная метрика g_{ik} является евклидовой, т.е. $g_{ik}=\begin{vmatrix} -1, & i=k \\ 0, & i\neq k \end{vmatrix}$;
5) пространство вращается с постоянной угловой скоростью Ω вокруг оси $x^3=z$, т.е. компоненты линейной скорости вращения равны $v_1=\Omega_{12}x^2=\Omega y$, $v_2=\Omega_{21}x^1=-\Omega x$.

С учетом этих ограничений метрика в масштабах элементарных частиц принимает вид

$$ds^2=c^2dt^2-2\Omega y\,dt\,dx+2\Omega x\,dt\,dy-dx^2-dy^2-dz^2, \tag{4.153}$$

а характеристики пространства с такой метрикой таковы

$$F_i=0\,,\quad D_{ik}=0\,,\quad A_{12}=-A_{21}=-\Omega\,,\quad A_{23}=A_{31}=0\,. \tag{4.154}$$

Как и в предыдущем параграфе, мы считаем, что скорость вращения пространства много меньше скорости света (слабое поле неголономности). В таком случае наблюдаемая трехмерная метрика h_{ik} является евклидовой и все символы Кристоффеля Δ^i_{jk} обращаются в нуль. Тогда хронометрически инвариантные уравнения движения массовой частицы с зарядом и спином принимают вид (покомпонентно) для частицы нашего мира

$$\frac{d}{d\tau}\left(m+\frac{\eta}{c^2}\right)=-\frac{e}{c^2}\,E_i\,\frac{dx^i}{d\tau}\,, \tag{4.155}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\left(m+\frac{\eta}{c^2}\right)\mathrm{v}^1}{d\tau}+2\left(m+\frac{\eta}{c^2}\right)\Omega\,\mathrm{v}^2=-e\left(E^1+\frac{1}{c}\,\varepsilon^{1km}\mathrm{v}_kH_{*m}\right)\\
&\frac{d\left(m+\frac{\eta}{c^2}\right)\mathrm{v}^2}{d\tau}-2\left(m+\frac{\eta}{c^2}\right)\Omega\,\mathrm{v}^1=-e\left(E^2+\frac{1}{c}\,\varepsilon^{2km}\mathrm{v}_kH_{*m}\right)\\
&\frac{d\left(m+\frac{\eta}{c^2}\right)\mathrm{v}^3}{d\tau}=-e\left(E^3+\frac{1}{c}\,\varepsilon^{3km}\mathrm{v}_kH_{*m}\right)
\end{aligned}\right\}, \tag{4.156}$$

и для частицы зазеркалья

$$\frac{d}{d\tau}\left(m+\frac{\eta}{c^2}\right)=\frac{e}{c^2}\,E_i\,\frac{dx^i}{d\tau}\,, \tag{4.157}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\left(m+\frac{\eta}{c^2}\right)\mathrm{v}^1}{d\tau}&=-e\left(E^1+\frac{1}{c}\,\varepsilon^{1km}\mathrm{v}_k H_{*m}\right)\\ \frac{d\left(m+\frac{\eta}{c^2}\right)\mathrm{v}^2}{d\tau}&=-e\left(E^2+\frac{1}{c}\,\varepsilon^{2km}\mathrm{v}_k H_{*m}\right)\\ \frac{d\left(m+\frac{\eta}{c^2}\right)\mathrm{v}^3}{d\tau}&=-e\left(E^3+\frac{1}{c}\,\varepsilon^{3km}\mathrm{v}_k H_{*m}\right)\end{aligned}\right\}. \tag{4.158}$$

Из скалярного уравнения движения как в нашем мире (4.155), так и в зазеркалье (4.157), следует, что сумма релятивистской массы элементарной частицы и ее спин-массы (характеристики спин-взаимодействия с полем неголономности) равняется работе электрического поля по перемещению данной заряженной частицы на участке dx^i. Из векторных уравнений движения следует, что, как в нашем мире (4.156), так и в зазеркалье (4.158), сумма трехмерных импульса частицы и спин-импульса в направлении оси $x^3=z$ определяется лишь компонентой силы Лоренца вдоль этой оси.

Теперь наша задача состоит в том, чтобы вычислить траекторию элементарной частицы с зарядом и спином в конкретном электромагнитном поле с заданными характеристиками. Так же, как в 3-й главе, будем считать электромагнитное поле постоянным, т.е. не зависящим от времени. Тогда напряженности E_i и H^{*i} равны

$$E_i=\frac{\partial\varphi}{dx^i}\,, \tag{4.159}$$

$$H^{*i}=\frac{1}{2}\,\varepsilon^{imn}H_{mn}=\frac{1}{2c}\,\varepsilon^{imn}\left[\frac{\partial\left(\varphi\mathrm{v}_m\right)}{dx^n}-\frac{\partial\left(\varphi\mathrm{v}_n\right)}{dx^m}-2\varphi A_{mn}\right]. \tag{4.160}$$

В 3-й главе нами была рассмотрена схожая задача — решение уравнений движения для заряженных массовых частиц в стационарных полях, но без учета спина. Поэтому естественно, что в частном случае, когда спин частицы равен нулю, решения уравнений заряженной частицы со спином, как более общие, должны совпадать с результатами, полученными в 3-й главе рамках “чистой” электродинамики.

При этом, чтобы сравнить наши расчеты с результатами, которые дает электродинамика, было бы целесообразно исследовать

движение массовой элементарной частицы с зарядом и спином в стационарных полях трех характерных типов, рассмотренных нами в 3-й главе, а также в книге Ландау и Лифшица *Теория поля*: 1) однородное электрическое поле (магнитная составляющая поля отсутствует); 2) однородное магнитное поле (электрическая составляющая поля отсутствует); 3) однородные электрическое и магнитное поля.

Вместе с тем в электродинамике рассматривается движение обычных (не элементарных) частиц, и еще не факт, что все три рассмотренных там случая могут быть применены при ограничениях на метрику, характерных для масштабов микромира. И мы сейчас объясним, почему это происходит. Во-первых, спин частицы влияет на ее движение лишь в том случае, если существует внешнее поле неголономности (вращения) пространства, следовательно, тензор неголономности $A_{ik} \neq 0$. А из выражений для электрической и магнитной напряженностей E_i и H^{*i} (4.159, 4.160) видно, что неголономность пространства влияет лишь на напряженность магнитного поля. Таким образом, в основном нас будет интересовать движение элементарной частицы в магнитном поле.

Во-вторых, скалярное уравнение движения массовой заряженной частицы с зарядом и спином (4.155)

$$\left(m_0 + \frac{\eta_0}{c^2}\right) \frac{d}{d\tau} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}} = -\frac{e}{c^2}\, E_i \mathrm{v}^i \tag{4.161}$$

в нерелятивистском случае, когда скорость частицы много меньше скорости света, принимает вид

$$E_i \mathrm{v}^i = 0\,, \tag{4.162}$$

т.е. электрическое поле *не совершает работы* по перемещению заряженной частицы при используемых нами ограничениях на метрику, характерных для масштабов элементарных частиц. Так как мы рассматриваем стационарное поле, то полученное условие (4.162) можно записать следующим образом

$$E_i \mathrm{v}^i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}\, \mathrm{v}^i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{d\varphi}{d\tau} = 0\,, \tag{4.163}$$

откуда следует, что скалярный потенциал поля постоянен ($\varphi = const$) и магнитная напряженность имеет вид

$$H^{*i} = \frac{\varphi}{2c}\, \varepsilon^{imn} \left[\frac{\partial \mathrm{v}_m}{\partial x^n} - \frac{\partial \mathrm{v}_n}{\partial x^m} - 2\left(\frac{\partial v_m}{\partial x^n} - \frac{\partial v_n}{\partial x^m} \right) \right]. \tag{4.164}$$

Для релятивистской заряженной элементарной частицы электрическое поле проявляется (т.е. совершает работу по ее перемещению) в том случае, если абсолютная величина ее скорости не является стационарной

$$\frac{1}{2c^2\left(1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)^{3/2}}\left(m_0+\frac{\eta_0}{c^2}\right)\frac{d\mathrm{v}^2}{d\tau}=-\frac{e}{c^2}\,E_i\mathrm{v}^i\neq 0\,. \tag{4.165}$$

Таким образом, электрическая составляющая поля, при заданных ограничениях на метрику, характерных в масштабах элементарных частиц, проявляется лишь для релятивистских частиц, величина скорости которых не постоянна вдоль траектории. Тем самым из рассмотрения в электрическом поле выпадают все "медленные" элементарные частицы.

Поэтому общий случай, т.е. движение элементарной частицы с произвольной (как малой, так и релятивистской) скоростью имеет смысл рассматривать в стационарном *магнитном поле* (когда электрическая составляющая отсутствует). Именно этому случаю мы и посвятим следующий параграф.

§4.7 Движение частицы со спином в стационарном магнитном поле

Исследуем движение заряженной частицы со спином в стационарном однородном магнитном поле. При этом, как и в предыдущем параграфе, будем считать. что пространство-время имеет метрику вида (4.153). В этом случае $F_i=0$ и $D_{ik}=0$. Поле неголономности является стационарным. При вращении относительно оси z из всех компонент тензора неголономности пространства отличны от нуля только компоненты $A_{12}=-A_{21}=-\Omega=const$, т.е. пространство вращается в плоскости $x\,y$ с постоянной угловой скоростью Ω.

В рассматриваемых условиях величина $\eta_0=n\hbar^{mn}A_{mn}$, характеризующая взаимодействие спина (внутреннего вращения) частицы с внешним полем неголономности (вращения) самого пространства, имеет следующий вид

$$\eta_0=n\hbar^{mn}A_{mn}=n\left(\hbar^{12}A_{12}+\hbar^{21}A_{21}\right)=-2n\hbar\Omega\,, \tag{4.166}$$

где знак произведения $\hbar\,\Omega$ определяется только взаимной ориентацией $\hbar$ и Ω. "Плюс" имеет место, если $\hbar$ и Ω сонаправлены, "минус" — если они противоположно направлены.

Уравнения движения заряженной частицы со спином принимают следующий вид (при ориентации потенциала A^α вдоль мировой ли-

нии частицы): для частицы нашего мира

$$\frac{d}{d\tau}\left(m+\frac{\eta}{c^2}\right)=0\,, \tag{4.167}$$

$$\frac{d}{d\tau}\left[\left(m+\frac{\eta}{c^2}\right)\mathrm{v}^i\right]+2\left(m+\frac{\eta}{c^2}\right)A_{k\cdot}^{\cdot i}\mathrm{v}^k+\left(m+\frac{\eta}{c^2}\right)\Delta_{nk}^i\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k= \\ =-\frac{e}{c}\,\varepsilon^{ikm}\mathrm{v}_k H_{*m}\,, \tag{4.168}$$

для частицы зазеркалья

$$-\frac{d}{d\tau}\left(m+\frac{\eta}{c^2}\right)=0\,, \tag{4.169}$$

$$\frac{d}{d\tau}\left[\left(m+\frac{\eta}{c^2}\right)\mathrm{v}^i\right]+\left(m+\frac{\eta}{c^2}\right)\Delta_{nk}^i\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k=-\frac{e}{c}\,\varepsilon^{ikm}\mathrm{v}_k H_{*m}\,. \tag{4.170}$$

Интегрируя теорему живых сил (скалярное уравнение), получаем интеграл живых сил. В нашем мире и в зазеркалье (соответственно) он имеет вид

$$m+\frac{\eta}{c^2}=B=const\,, \qquad m+\frac{\eta}{c^2}=-\widetilde{B}=const\,, \tag{4.171}$$

где B постоянная интегрирования в нашем мире и $\widetilde{B}$ — в зазеркалье. Вычислим эти константы, подставив в (4.171) начальные условия в момент $\tau=0$. В результате получаем

$$B=m_0+\frac{\eta_0}{c^2}=m_0+\frac{n\hbar^{mn}A_{mn}}{c^2}\,, \tag{4.172}$$

$$\widetilde{B}=-m_0-\frac{\eta_0}{c^2}=-m_0-\frac{n\hbar^{mn}A_{mn}}{c^2}\,. \tag{4.173}$$

Из интегралов живых сил в стационарном однородном магнитном поле (4.171) следует, что в отсутствие электрической составляющей электромагнитного поля квадрат скорости заряженной частицы со спином сохраняется $\mathrm{v}^2=h_{ik}\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k=const$.

Подставляя выражения для интегралов живых сил в выражения (4.168, 4.170), получаем векторные уравнения движения в нашем мире и в зазеркалье (соответственно)

$$\frac{d\mathrm{v}^i}{d\tau}+2A_{k\cdot}^{\cdot i}\mathrm{v}^k+\Delta_{nk}^i\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k=-\frac{e}{cB}\,\varepsilon^{ikm}\mathrm{v}_k H_{*m}\,, \tag{4.174}$$

$$\frac{d\mathrm{v}^i}{d\tau}+\Delta_{nk}^i\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k=-\frac{e}{c\widetilde{B}}\,\varepsilon^{ikm}\mathrm{v}_k H_{*m}\,. \tag{4.175}$$

Они аналогичны уравнениям движения заряженной частицы без спина в стационарном однородном магнитном поле (3.290, 3.291) с той лишь поправкой, что в данном случае константа интегрирования интеграла живых сил, стоящая в знаменателе правой части, равна не релятивистской массе m, как в электродинамике (3.290, 3.291), а выражению (4.171), которое учитывает взаимодействие спина частицы с полем неголономности пространства. То же самое и с покомпонентной записью векторных уравнений (3.298, 3.299).

Для интересующихся подробностями метода хронометрических инвариантов отметим один момент, касающийся покомпонентной записи уравнений движения. При вычислении компонент члена $A_{k\cdot}^{\cdot i}\mathrm{v}^k$, присутствующих только в уравнениях движения в нашем мире, получается, например, для $i=1$

$$A_{k\cdot}^{\cdot 1}\mathrm{v}^k = A_{1\cdot}^{\cdot 1}\mathrm{v}^1 + A_{2\cdot}^{\cdot 1}\mathrm{v}^2 = h^{12}A_{12}\mathrm{v}^1 + h^{11}A_{21}\mathrm{v}^2, \tag{4.176}$$

где $A_{12} = -A_{21} = -\Omega$. Тогда, вычисляя $A_{1\cdot}^{\cdot 1}$ и $A_{2\cdot}^{\cdot 1}$, имеем

$$A_{1\cdot}^{\cdot 1} = h^{1m}A_{1m} = h^{11}A_{11} + h^{12}A_{12} = h^{12}A_{12}\,, \tag{4.177}$$

$$A_{2\cdot}^{\cdot 1} = h^{1m}A_{2m} = h^{11}A_{21} + h^{12}A_{22} = h^{11}A_{21}\,, \tag{4.178}$$

где h^{ik} суть элементы матрицы, обратной матрице h_{ik}

$$h^{11} = \frac{h_{22}}{h}\,, \qquad h^{12} = -\frac{h_{12}}{h}\,. \tag{4.179}$$

Тогда, т.к. детерминант трехмерного наблюдаемого метрического тензора (см. §3.12) имеет вид

$$h = \det\|h_{ik}\| = 1 + \frac{\Omega^2\left(x^2+y^2\right)}{c^2}\,, \tag{4.180}$$

искомая величина $A_{k\cdot}^{\cdot 1}\mathrm{v}^k$ (4.176) составляет

$$A_{k\cdot}^{\cdot 1}\mathrm{v}^k = \frac{\Omega}{h}\left[\,\frac{\Omega^2}{c^2}\,xy\dot{x} + \left(1 + \frac{\Omega^2 x^2}{c^2}\right)\dot{y}\,\right]. \tag{4.181}$$

Аналогично вычисляется и компонента $A_{k\cdot}^{\cdot 2}\mathrm{v}^k$, входящая в уравнение движения вдоль оси y.

Теперь вернемся к векторным уравнениям движения заряженной частицы со спином в стационарном однородном магнитном поле. Будем решать их для двух возможных случаев взаимной ориентации магнитного поля и поля неголономности.

§4.7.1 Магнитное поле сонаправлено с полем неголономности пространства

Пусть поле неголономности направлено вдоль оси z и является слабым. В этом случае векторные уравнения движения массовой частицы с зарядом и спином (покомпонентно) принимают следующий вид: для частицы нашего мира

$$\ddot{x} + 2\Omega\dot{y} = -\frac{eH}{cB}\,\dot{y}\,, \quad \ddot{y} - 2\Omega\dot{x} = -\frac{eH}{cB}\,\dot{x}\,, \quad \ddot{z} = 0 \tag{4.182}$$

и для частицы зазеркалья

$$\ddot{x} = -\frac{eH}{c\widetilde{B}}\,\dot{y}\,, \quad \ddot{y} = -\frac{eH}{c\widetilde{B}}\,\dot{x}\,, \quad \ddot{z} = 0\,. \tag{4.183}$$

Они также отличаются от уравнений движения заряженной частицы без спина в стационарном однородном магнитном поле, сонаправленом слабому полю неголономности (3.104, 3.305), лишь тем, что здесь в знаменателе правой части вместо релятивистской массы частицы стоит константа интегрирования интеграла живых сил, учитывающая взаимодействие спина частицы с полем неголономности пространства. Используя готовые решения из §3.12, мы сразу получаем выражения для координат x и y заряженной частицы со спином в нашем мире

$$x = -\left[\,\dot{y}_{(0)}\cos\left(2\Omega+\omega\right)\tau + \dot{x}_{(0)}\sin\left(2\Omega+\omega\right)\tau\,\right]\frac{1}{2\Omega+\omega} + \\ + x_{(0)} + \frac{\dot{y}_{(0)}}{2\Omega+\omega}\,, \tag{4.184}$$

$$y = \left[\,\dot{y}_{(0)}\sin\left(2\Omega+\omega\right)\tau - \dot{x}_{(0)}\cos\left(2\Omega+\omega\right)\tau\,\right]\frac{1}{2\Omega+\omega} + \\ + y_{(0)} - \frac{\dot{x}_{(0)}}{2\Omega+\omega} \tag{4.185}$$

и в зазеркалье

$$x = -\frac{1}{\omega}\left[\,\dot{y}_{(0)}\cos\omega\tau + \dot{x}_{(0)}\sin\omega\tau\,\right] + x_{(0)} + \frac{\dot{y}_{(0)}}{\omega}\,, \tag{4.186}$$

$$y = \frac{1}{\omega}\left[\,\dot{y}_{(0)}\sin\omega\tau - \dot{x}_{(0)}\cos\omega\tau\,\right] + y_{(0)} - \frac{\dot{x}_{(0)}}{\omega}\,, \tag{4.187}$$

отличающиеся от решений для заряженной частицы в электродинамике тем, что здесь частота ω учитывает взаимодействие спина с полем неголономности пространства. Массы частиц нашего мира

положительны, следовательно, в нашем мире частота ω выражается следующим образом

$$\omega=\frac{eH}{mc+\frac{\eta}{c}}=\frac{eH\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}_{(0)}^2}{c^2}}}{m_0c+\frac{\eta_0}{c}}=\frac{eH\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}_{(0)}^2}{c^2}}}{m_0c\mp\frac{2n\hbar\,\Omega}{c}}\,, \tag{4.188}$$

где знак в знаменателе зависит только от взаимной ориентации $\hbar$ и Ω: знак "минус" имеет место, если $\hbar$ и Ω сонаправлены (знак их скалярного произведения положителен), "плюс" — если они противоположно направлены, независимо от выбора правой или левой системы координат. Массы частиц, обитающих в зазеркалье, имеют строго отрицательные значения

$$m=-\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}_{(0)}^2}{c^2}}}<0\,, \tag{4.189}$$

таким образом, в зазеркалье частота ω составляет

$$\omega=\frac{eH}{mc+\frac{\eta}{c}}=\frac{eH\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}_{(0)}^2}{c^2}}}{-m_0c+\frac{\eta_0}{c}}=\frac{eH\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}_{(0)}^2}{c^2}}}{-m_0c\mp\frac{2n\hbar\,\Omega}{c}}\,. \tag{4.190}$$

При этом в полученных выражениях для координат (4.184–4.187) уже учтено, что квадрат скорости частицы в нашем мире и в зазеркалье (соответственно) является постоянным

$$\dot{x}_{(0)}+\frac{\ddot{y}_0}{2\Omega+\omega}=0\,,\qquad \dot{x}_{(0)}+\frac{\ddot{y}_0}{\omega}=0\,, \tag{4.191}$$

что вытекает из интеграла живых сил (§3.12). Решение третьего уравнения движения (вдоль оси z) имеет простой вид

$$z=\dot{z}_{(0)}\tau+z_{(0)}\,. \tag{4.192}$$

Из полученных выражений для координат (4.184–4.187) видно: заряженная массовая частица со спином в стационарном однородном магнитном поле, параллельном слабому полю неголономности, совершает *гармонические колебания* в направлениях x и y. Частота этих колебаний в нашем мире

$$\widetilde{\omega}=2\Omega+\omega=2\Omega+\frac{eH}{m_0c\mp\frac{2n\hbar\,\Omega}{c}}\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}_{(0)}^2}{c^2}}\,. \tag{4.193}$$

В зазеркалье частица совершает аналогичные колебания с частотой ω, приведенной в выражении (4.190).

В слабом поле неголономности величина $n\hbar\Omega$ много меньше энергии m_0c^2 и, т.к. для малой величины α имеет место соотношение $\frac{1}{1\mp\alpha} \cong 1 \pm \alpha$, при малых скоростях имеем

$$\widetilde{\omega} \cong 2\Omega + \frac{eH}{m_0 c}\left(1 \pm \frac{2n\hbar\Omega}{m_0 c^2}\right). \qquad (4.194)$$

Если в начальный момент смещение и скорость частицы нашего мира удовлетворяют условиям

$$x_{(0)} + \frac{\dot{y}_0}{2\Omega + \omega} = 0\,, \qquad y_{(0)} - \frac{\dot{x}_0}{2\Omega + \omega} = 0\,, \qquad (4.195)$$

она будет двигаться, как и заряженная частица без спина, в плоскости $x\,y$ по *окружности**

$$x^2 + y^2 = \frac{\dot{y}_0^2}{\left(2\Omega + \omega\right)^2}\,, \qquad (4.196)$$

только ее радиус, равный

$$r = \frac{\dot{y}_0}{2\Omega + \omega} = \frac{\dot{y}_0}{2\Omega + \frac{eH}{m_0 c \mp \frac{2n\hbar\Omega}{c}}\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}_{(0)}^2}{c^2}}}\,, \qquad (4.197)$$

в данном случае зависит от величины и направления спина частицы. Если начальная скорость заряженной частицы со спином в направлении магнитного поля (вдоль оси z) отлична от нуля, она движется вдоль линий напряженности магнитного поля по *винтовой линии* с тем же радиусом r (4.197).

Частица зазеркалья, если в начальный момент ее смещение и скорость удовлетворяют условиям

$$x_{(0)} + \frac{\dot{y}_0}{\omega} = 0\,, \qquad y_{(0)} - \frac{\dot{x}_0}{\omega} = 0\,, \qquad (4.198)$$

также будет двигаться по окружности

$$x^2 + y^2 = \frac{\dot{y}_0^2}{\omega^2}\,, \qquad (4.199)$$

*При этом мы выбираем ось y вдоль начального импульса частицы, что всегда можно сделать. Тогда в выражениях для координат начальная скорость частицы вдоль оси x будет равной нулю.

радиус которой равен

$$r=\frac{\dot y_0}{\omega}=\frac{\dot y_0}{\frac{eH}{-m_0c\mp\frac{2n\hbar\,\Omega}{c}}\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2_{(0)}}{c^2}}}\,. \qquad (4.200)$$

В общем случае, т.е. без дополнительных условий (4.195, 4.198), траектория в плоскости xy отличается от окружности.

Теперь вычислим общую энергию и импульс заряженной частицы со спином в магнитном поле. Используя выражения для интегралов живых сил, находим, что величина η_0 в данном случае равна $\eta_0=n\hbar^{mn}A_{mn}=n\,(\hbar^{12}A_{12}+\hbar^{21}A_{21})=-2n\hbar\,\Omega$. Тогда для массовой частицы нашего мира получаем

$$E_{\mathrm{tot}}=Bc^2=\frac{m_0c^2\mp 2n\hbar\,\Omega}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2_{(0)}}{c^2}}}=const\,, \qquad (4.201)$$

а для массовой частицы зазеркалья

$$E_{\mathrm{tot}}=\widetilde{B}c^2=\frac{-m_0c^2\mp 2n\hbar\,\Omega}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2_{(0)}}{c^2}}}=const\,. \qquad (4.202)$$

Так как в данной задаче электрическая компонента поля отсутствует, электромагнитное поле не вносит вклад в общую энергию частицы (магнитное поле, как известно, не совершает работу по перемещению электрического заряда).

Из полученных выражений (4.201, 4.202) видно: полная энергия частицы со спином является постоянной, а ее величина зависит от взаимной ориентации внутреннего момента частицы $\hbar$ и угловой скорости вращения пространства Ω.

Последнее требует некоторых пояснений. По определению, скалярная величина n (т.е. абсолютное значение спина частицы в единицах $\hbar$) имеет строго положительный знак, тогда как $\hbar$ и Ω суть численные значения компонент двух антисимметричных тензоров $\hbar^{ik}$ и Ω_{ik}; каждый из этих тензоров принимает противоположные значения в правой и левой системах координат. Но, т.к. мы рассматриваем произведения этих величин, имеет значение лишь их взаимная направленность, не зависящая от выбора правой или левой системы координат.

Если $\hbar$ и Ω сонаправлены, полная энергия частицы нашего мира E_{tot} (4.201) есть сумма ее релятивистской энергии $E=mc^2$ и “спин-

энергии"

$$E_{\mathrm{s}} = \frac{2n\hbar\Omega}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}_{(0)}^2}{c^2}}}\,, \tag{4.203}$$

т.е. полная энергия превышает величину $E = mc^2$.

Если $\hbar$ и Ω направлены в противоположные стороны, величина E_{tot} представляет собой разность релятивистской энергии частицы и ее "спин-энергии". При такой ориентации возможен частный случай, когда $m_0c^2 = 2n\hbar\Omega$ и, таким образом, полная энергия частицы обращается в нуль (этот особый случай мы подробно рассмотрим в следующем параграфе).

Для частиц с отрицательными массами, обитающих в зазеркалье, наоборот: полная энергия E_{tot} (4.202) является отрицательной величиной и превышает (по абсолютной величине) релятивистскую энергию $E = -mc^2$, если $\hbar$ и Ω противоположно направлены.

Выражение для полного трехмерного импульса частицы с зарядом и спином в магнитном поле нашего мира имеет вид

$$p^i_{\mathrm{tot}} = \frac{m_0c^2 \mp 2n\hbar\Omega}{c^2\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}_{(0)}^2}{c^2}}}\,\mathrm{v}^i = m\mathrm{v}^i \mp \frac{2n\hbar\Omega}{c^2\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}_{(0)}^2}{c^2}}}\,\mathrm{v}^i, \tag{4.204}$$

т.е. представляет собой алгебраическую сумму релятивистского наблюдаемого импульса $p^i = m\mathrm{v}^i$ и спин-импульса, сообщаемого частице со спином полем неголономности пространства. Полный импульс частицы со спином превышает релятивистский импульс, если $\hbar$ и Ω сонаправлены, и, наоборот, уменьшаются, если $\hbar$ и Ω противоположно направлены.

В случае противоположной направленности $\hbar$ и Ω полный импульс частицы со спином обращается в нуль (как и ее полная энергия), если выполняется условие $m_0c^2 = 2n\hbar\Omega$.

Для частицы зазеркалья в магнитном поле, соответственно, трехмерный импульс имеет вид

$$p^i_{\mathrm{tot}} = \frac{-m_0c^2 \mp 2n\hbar\Omega}{c^2\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}_{(0)}^2}{c^2}}}\,\mathrm{v}^i = -m\mathrm{v}^i \mp \frac{2n\hbar\Omega}{c^2\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}_{(0)}^2}{c^2}}}\,\mathrm{v}^i, \tag{4.205}$$

т.е. частица движется медленнее, если $\hbar$ и Ω сонаправлены, и быстрее, если они направлены в противоположные стороны. Компоненты скорости заряженной частицы со спином в магнитном поле, сонаправленным с полем неголономности, с учетом условий (4.191),

имеют вид в нашем мире

$$\dot{x} = \dot{y}_{(0)} \sin(2\Omega + \omega)\,\tau - \dot{x}_{(0)} \cos(2\Omega + \omega)\,\tau\,, \tag{4.206}$$

$$\dot{y} = \dot{y}_{(0)} \cos(2\Omega + \omega)\,\tau + \dot{x}_{(0)} \sin(2\Omega + \omega)\,\tau \tag{4.207}$$

и в зазеркалье

$$\dot{x} = \dot{y}_{(0)} \sin\omega\tau - \dot{x}_{(0)} \cos\omega\tau\,, \tag{4.208}$$

$$\dot{y} = \dot{y}_{(0)} \cos\omega\tau + \dot{x}_{(0)} \sin\omega\tau\,. \tag{4.209}$$

Тогда компоненты полного импульса частицы имеют следующий вид (начальный импульс в плоскости $x\,y$ мы полагаем направленным вдоль оси y): в нашем мире

$$p^1_{\text{tot}} = \frac{m_0 c^2 \mp 2n\hbar\,\Omega}{c^2\sqrt{1-\frac{\text{v}^2_{(0)}}{c^2}}}\,\dot{y}_{(0)} \sin(2\Omega + \omega)\,\tau\,, \tag{4.210}$$

$$p^2_{\text{tot}} = \frac{m_0 c^2 \mp 2n\hbar\,\Omega}{c^2\sqrt{1-\frac{\text{v}^2_{(0)}}{c^2}}}\,\dot{y}_{(0)} \cos(2\Omega + \omega)\,\tau\,, \tag{4.211}$$

$$p^3_{\text{tot}} = \frac{m_0 c^2 \mp 2n\hbar\,\Omega}{c^2\sqrt{1-\frac{\text{v}^2_{(0)}}{c^2}}}\,\dot{z}_{(0)}\,, \tag{4.212}$$

где частота ω имеет вид (4.188), и в зазеркалье

$$p^1_{\text{tot}} = \frac{-m_0 c^2 \mp 2n\hbar\,\Omega}{c^2\sqrt{1-\frac{\text{v}^2_{(0)}}{c^2}}}\,\dot{y}_{(0)} \sin\omega\tau\,, \tag{4.213}$$

$$p^2_{\text{tot}} = \frac{-m_0 c^2 \mp 2n\hbar\,\Omega}{c^2\sqrt{1-\frac{\text{v}^2_{(0)}}{c^2}}}\,\dot{y}_{(0)} \cos\omega\tau\,, \tag{4.214}$$

$$p^3_{\text{tot}} = \frac{-m_0 c^2 \mp 2n\hbar\,\Omega}{c^2\sqrt{1-\frac{\text{v}^2_{(0)}}{c^2}}}\,\dot{z}_{(0)}\,, \tag{4.215}$$

где ω равна (4.190). При этом, хотя напряженность магнитного поля не входит в выражение для полной энергии частицы E_{tot}, тем не менее она проявляется в выражении для полного импульса, т.к. входит в частоту ω (4.190).

§4.7.2 Магнитное поле ортогонально полю неголономности пространства

Теперь рассмотрим движение массовой заряженной частицы со спином в магнитном поле, ортогональном полю неголономности пространства. Естественно, как и раньше, речь идет о стационарном и однородном магнитном поле.

Итак, поле неголономности направлено вдоль оси z и является слабым. Магнитное поле направлено вдоль оси y. Тогда, как нетрудно убедиться, векторные уравнения движения частицы со спином будут аналогичны уравнениям для бесспиновой частицы, полученным для рассматриваемой конфигурации полей для нашего мира (3.338), и примут вид

$$\ddot{x} + 2\Omega\dot{y} = \frac{eH}{cB}\,\dot{z}\,, \qquad \ddot{y} - 2\Omega\dot{x} = 0\,, \qquad \ddot{z} = -\frac{eH}{cB}\,\dot{x}\,. \tag{4.216}$$

Отличие от (3.338) лишь в том, что здесь знаменатель правой части вместо релятивистской массы частицы содержит константу интегрирования интеграла живых сил, учитывающую взаимодействие спина частицы с полем неголономности. После интегрирования получаем решения

$$x = \frac{\dot{x}_{(0)}}{\widetilde{\omega}}\sin\widetilde{\omega}\tau - \frac{\ddot{x}_{(0)}}{\widetilde{\omega}^2}\cos\widetilde{\omega}\tau + x_{(0)} + \frac{\ddot{x}_{(0)}}{\widetilde{\omega}^2}\,, \tag{4.217}$$

$$y = -\frac{2\Omega}{\widetilde{\omega}^2}\left(\dot{x}_{(0)}\cos\widetilde{\omega}\tau + \frac{\ddot{x}_{(0)}}{\widetilde{\omega}}\sin\widetilde{\omega}\tau\right) + \dot{y}_{(0)}\tau + \\ + \frac{2\Omega}{\widetilde{\omega}^2}\,\ddot{x}_{(0)}\tau + y_{(0)} + \frac{2\Omega}{\widetilde{\omega}^2}\,\dot{x}_{(0)}\,, \tag{4.218}$$

$$z = \frac{\omega}{\widetilde{\omega}^2}\left(\dot{x}_{(0)}\cos\widetilde{\omega}\tau + \frac{\ddot{x}_{(0)}}{\widetilde{\omega}}\sin\widetilde{\omega}\tau\right) + \dot{z}_{(0)}\tau - \\ - \frac{\omega}{\widetilde{\omega}^2}\,\ddot{x}_{(0)}\tau + z_{(0)} - \frac{\omega}{\widetilde{\omega}^2}\,\dot{x}_{(0)}\,, \tag{4.219}$$

отличающиеся от соответствующих решений для бесспиновой частицы тем, что частота $\widetilde{\omega}$ в данном случае зависит от спина частицы и его взаимной ориентации с полем неголономности

$$\widetilde{\omega} = \sqrt{4\Omega^2 + \omega^2} = \sqrt{4\Omega^2 + \frac{e^2H^2\left(1 - \frac{\mathrm{v}_{(0)}^2}{c^2}\right)^2}{\left(m_0c^2 \mp \frac{2n\hbar\,\Omega}{c}\right)^2}}\,. \tag{4.220}$$

Соответственно, уравнение траектории частицы со спином аналогично уравнению траектории бесспиновой частицы. В данном случае, т.е. при определенных начальных условиях, уравнение ее траектории представляет собой уравнение *сферы*

$$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{\widetilde{\omega}^2}\,\dot{x}^2_{(0)}\,, \tag{4.221}$$

радиус которой, в отличие от радиуса траектории бесспиновой частицы, зависит от спина частицы и его ориентации относительно поля неголономности пространства

$$r=\frac{1}{\sqrt{4\Omega^2+\dfrac{e^2H^2\left(1-\frac{\mathrm{v}^2_{(0)}}{c^2}\right)^2}{\left(m_0c^2\mp\frac{2n\hbar\Omega}{c}\right)^2}}}\,\dot{x}_{(0)}\,. \tag{4.222}$$

Для частицы зазеркалья векторные уравнения движения имеют вид (3.355)

$$\ddot{x}=\frac{eH}{c\widetilde{B}}\,\dot{z}\,,\qquad \ddot{y}=0\,,\qquad \ddot{z}=-\frac{eH}{c\widetilde{B}}\,\dot{x}\,, \tag{4.223}$$

т.е. отличаются от уравнений движения частицы нашего мира (4.216) отсутствием членов, содержащих скорость вращения пространства Ω. В результате решения для них получаются из решений для нашего мира (4.217–4.219), если положить $\widetilde{\omega}=\omega$. Соответственно, уравнение траектории частицы со спином в зазеркалье имеет следующий вид

$$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{\omega^2}\,\dot{x}^2_{(0)}\,,\qquad r=\frac{-m_0c^2\mp\dfrac{2n\hbar\Omega}{c}}{eH\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2_{(0)}}{c^2}}}\,\dot{x}_{(0)}\,. \tag{4.224}$$

Выражение для полной энергии частицы со спином E_{tot} в магнитном поле, ортогональным полю неголономности, имеет такой же вид, как и в случае параллельной ориентации полей. Однако выражения для компонент полного импульса (4.204, 4.205) отличаются, т.к. в него входит скорость частицы, зависящая от направления магнитного поля и поля неголономности. В данном случае, когда эти поля ортогональны друг другу, компоненты скорости частицы (получающиеся дифференцированием выражений для координат) в нашем мире имеют вид

$$\dot{x}=\dot{x}_{(0)}\cos\widetilde{\omega}\tau+\frac{\ddot{x}_{(0)}}{\widetilde{\omega}}\sin\widetilde{\omega}\tau\,, \tag{4.225}$$

$$\dot{y} = \frac{2\Omega}{\widetilde{\omega}}\,\dot{x}_{(0)}\sin\widetilde{\omega}\tau - \frac{2\Omega}{\widetilde{\omega}^2}\,\ddot{x}_{(0)}\cos\widetilde{\omega}\tau + \dot{y}_{(0)} + \frac{2\Omega}{\widetilde{\omega}^2}\,\ddot{x}_{(0)}\,, \qquad (4.226)$$

$$\dot{z} = \frac{\omega}{\widetilde{\omega}^2}\,\ddot{x}_{(0)}\cos\widetilde{\omega}\tau - \frac{\omega}{\widetilde{\omega}}\,\dot{x}_{(0)}\sin\widetilde{\omega}\tau + \dot{z}_{(0)} - \frac{\omega}{\widetilde{\omega}^2}\,\ddot{x}_{(0)} \qquad (4.227)$$

и в зазеркалье

$$\dot{x} = \dot{x}_{(0)}\cos\omega\tau + \frac{\ddot{x}_{(0)}}{\omega}\sin\omega\tau\,, \qquad (4.228)$$

$$\dot{y} = \dot{y}_{(0)}\,, \qquad (4.229)$$

$$\dot{z} = \frac{1}{\omega}\,\ddot{x}_{(0)}\cos\widetilde{\omega}\tau - \dot{x}_{(0)}\sin\omega\tau + \dot{z}_{(0)} - \frac{1}{\omega}\,\ddot{x}_{(0)}\,. \qquad (4.230)$$

Отсюда, полагая начальное ускорение частицы и константы интегрирования равными нулю, а также выбрав направление оси x вдоль начального импульса частицы, получаем компоненты ее полного импульса в нашем мире

$$p^1_{\text{tot}} = \frac{m_0c^2 \mp 2n\hbar\Omega}{c^2\sqrt{1-\frac{\text{v}^2_{(0)}}{c^2}}}\,\dot{x}_{(0)}\cos\widetilde{\omega}\tau\,, \qquad (4.231)$$

$$p^2_{\text{tot}} = \frac{m_0c^2 \mp 2n\hbar\Omega}{c^2\sqrt{1-\frac{\text{v}^2_{(0)}}{c^2}}}\,\frac{2\Omega}{\widetilde{\omega}}\,\dot{x}_{(0)}\sin\widetilde{\omega}\tau\,, \qquad (4.232)$$

$$p^3_{\text{tot}} = \frac{m_0c^2 \mp 2n\hbar\Omega}{c^2\sqrt{1-\frac{\text{v}^2_{(0)}}{c^2}}}\,\frac{\omega}{\widetilde{\omega}}\,\dot{x}_{(0)}\sin\widetilde{\omega}\tau \qquad (4.233)$$

и в зазеркалье, соответственно,

$$p^1_{\text{tot}} = \frac{-m_0c^2 \mp 2n\hbar\Omega}{c^2\sqrt{1-\frac{\text{v}^2_{(0)}}{c^2}}}\,\dot{x}_{(0)}\cos\widetilde{\omega}\tau\,, \qquad (4.234)$$

$$p^2_{\text{tot}} = \frac{-m_0c^2 \mp 2n\hbar\Omega}{c^2\sqrt{1-\frac{\text{v}^2_{(0)}}{c^2}}}\,\dot{y}_{(0)} = 0\,, \qquad (4.235)$$

$$p^3_{\text{tot}} = \frac{-m_0c^2 \mp 2n\hbar\Omega}{c^2\sqrt{1-\frac{\text{v}^2_{(0)}}{c^2}}}\,\dot{x}_{(0)}\sin\widetilde{\omega}\tau\,. \qquad (4.236)$$

Полученные здесь решения преобразуются в соответствующие решения из электродинамики (§3.12), если положить $\hbar\to 0$.

§4.8 Закон квантования масс элементарных частиц

Скалярные уравнения движения заряженной частицы со спином в электромагнитном поле в нашем мире и в зазеркалье, соответственно, имеют вид

$$\frac{d}{d\tau}\left(m+\frac{\eta}{c^2}\right)=-\frac{e}{c^2}\,E_i\mathrm{v}^i, \quad -\frac{d}{d\tau}\left(m+\frac{\eta}{c^2}\right)=-\frac{e}{c^2}\,E_i\mathrm{v}^i. \tag{4.237}$$

Они легко интегрируются, в результате чего получаются интегралы живых сил

$$m+\frac{\eta}{c^2}=B\,, \qquad -\left(m+\frac{\eta}{c^2}\right)=\widetilde{B}\,, \tag{4.238}$$

где B постоянная интегрирования в нашем мире и $\widetilde{B}$ постоянная интегрирования в зазеркалье.

Константы интегрирования, вообще говоря, определяются только начальными условиями. Поэтому мы всегда можем выбрать их так, чтобы константы интегрирования обратились в нуль.

Посмотрим, при каких начальных условиях обращаются в нуль постоянные интегрирования скалярных уравнений движения заряженной частицы со спином в электромагнитном поле. Для заряженной частицы со спином нашего мира и зазеркалья (4.238), соответственно,

$$m+\frac{\eta}{c^2}=0\,, \qquad -\left(m+\frac{\eta}{c^2}\right)=0\,, \tag{4.239}$$

при этом правые части векторных уравнений движения (4.150, 4.152), содержащие трехмерную хронометрически инвариантную силу Лоренца, также обращаются в нуль, т.е. электромагнитное поле при условии равенства нулю констант интегрирования скалярных уравнений движения не оказывает воздействия на частицу.

Сокращая в выражениях (4.239) релятивистский корень, что всегда можно сделать для массовых частиц (т.е. не обладающих массой покоя), мы можем записать эти соотношения в форме, не зависящей от скорости частицы. Тогда для массовой частицы нашего мира имеем

$$m_0c^2=-n\hbar^{mn}A_{mn}\,, \tag{4.240}$$

для массовых частиц зазеркалья

$$m_0c^2=n\hbar^{mn}A_{mn}\,. \tag{4.241}$$

Назовем эти соотношения *законом квантования масс элементарных частиц*:

> Масса покоя элементарной частицы со спином пропорциональна энергии взаимодействия ее спина с полем неголономности пространства, взятой с обратным знаком.

Или, иначе:

> Энергия покоя массовой элементарной частицы равна энергии взаимодействия ее спина с полем неголономности пространства, взятой с обратным знаком.

Так как энергия частицы зазеркалья имеет отрицательное численное значение, знак "плюс" в правой части соотношения (4.241) обозначает энергию спин-взаимодействия в зазеркалье, взятую с обратным знаком так же, как и знак "минус" в выражении (4.240) для нашего мира.

Для бесспиновых частиц, очевидно, данные квантовые соотношения неприменимы.

Проведем некоторые количественные оценки, следующие из полученного закона квантования масс. Численные значения величины $\eta_0 = n\hbar^{mn}A_{mn}$, характеризующей энергию взаимодействия спина частицы с полем неголономности пространства ("спин-энергия"), получим следующим образом. Выразив тензор угловых скоростей вращения пространства A_{mn} через псевдовектор этого вращения $\Omega^{*i} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{imn}A_{mn}$

$$\Omega^{*i}\varepsilon_{imn} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{ipq}\varepsilon_{imn}A_{pq} = \frac{1}{2}\left(\delta^p_m\delta^q_n - \delta^p_n\delta^q_m\right)A_{pq} = A_{mn}\,, \qquad (4.242)$$

мы имеем $A_{mn} = \varepsilon_{imn}\Omega^{*i}$. Следовательно

$$\frac{1}{2}\,\varepsilon_{imn}\hbar^{mn} = \hbar_{*i} \qquad (4.243)$$

есть псевдовектор Планка, а величина $\eta_0 = n\hbar^{mn}\varepsilon_{imn}\Omega^{*i}$ равна

$$\eta_0 = 2n\hbar_{*i}\Omega^{*i}, \qquad (4.244)$$

т.е. представляет собой удвоенное скалярное произведение трехмерного псевдовектора Планка и трехмерного псевдовектора скорости вращения пространства, умноженное на спиновое квантовое число частицы (скаляр).

Как известно, скалярное произведение двух псевдовекторов есть произведение их модулей (абсолютных величин) на косинус угла между ними. Тогда, если $\hbar_{*i}$ и Ω^{*i} сонаправлены, то

$$\eta_0 = 2n\hbar_{*i}\Omega^{*i} = 2n\hbar\,\Omega\cos\left(\vec{\hbar};\vec{\Omega}\right) > 0\,, \qquad (4.245)$$

а если они противоположно направлены, то

$$\eta_0 = 2n\hbar_{*i}\Omega^{*i} = 2n\hbar\,\Omega\cos\left(\vec{\hbar};\vec{\Omega}\right) < 0\,. \tag{4.246}$$

Таким образом, для массовых частиц нашего мира константа интегрирования живых сил обращается в нуль, если псевдовекторы $\hbar_{*i}$ и Ω^{*i} ориентированы в противоположные стороны. Для частиц зазеркалья константа интегрирования интеграла живых сил равна нулю при сонаправлености псевдовекторов $\hbar_{*i}$ и Ω^{*i}.

Это означает: когда энергия взаимодействия спина массовой частицы с полем неголономности становится равной ее энергии покоя $E=m_0c^2$, импульс частицы никак не проявляется ни в нашем мире, ни в зазеркалье. Будем полагать, что ось z сонаправлена с псевдовектором угловой скорости вращения пространства Ω^{*i}. Тогда из всех трех компонент Ω^{*i} отлична от нуля лишь компонента

$$\Omega^{*3}=\frac{1}{2}\,\varepsilon^{3mn}A_{mn}=\frac{1}{2}\left(\varepsilon^{312}A_{12}+\varepsilon^{321}A_{21}\right)=\varepsilon^{312}A_{12}=\frac{e^{312}}{\sqrt{h}}A_{12}\,. \tag{4.247}$$

Для простоты вычислений будем полагать, что трехмерная метрика g_{ik} является евклидовой, а пространство вращается с постоянной угловой скоростью, равной Ω. Тогда компоненты линейной скорости вращения пространства равны $v_1=\Omega x$, $v_2=-\Omega y$ и $A_{12}=-\Omega$. В таких условиях

$$\Omega^{*3} = \frac{e^{312}}{\sqrt{h}}A_{12} = \frac{A_{12}}{\sqrt{h}} = -\frac{\Omega}{\sqrt{h}}\,. \tag{4.248}$$

Корень квадратный из детерминанта наблюдаемого метрического тензора, определяемый из (4.180)

$$\sqrt{h} = \sqrt{\det\|h_{ik}\|} = \sqrt{1+\frac{\Omega^2\left(x^2+y^2\right)}{c^2}}\,. \tag{4.249}$$

Так как мы рассматриваем малые значения координат, сравнимые с масштабами элементарных частиц, можно считать $\sqrt{h}\approx 1$, следовательно $\Omega^{*3}=-\Omega=const$. Тогда закон квантования масс элементарных частиц (4.240) принимает вид: для массовых частиц нашего мира и для массовых частиц зазеркалья, соответственно

$$m_0 = \frac{2n\hbar\Omega}{c^2}\,, \qquad m_0 = -\frac{2n\hbar\Omega}{c^2}\,. \tag{4.250}$$

Следовательно, для элементарных частиц нашего мира, обладающих спином, имеет место соотношение

$$\Omega = \frac{m_0c^2}{2n\hbar}\,. \tag{4.251}$$

Это означает, что масса покоя (истинная масса) наблюдаемого объекта, в обычных макроусловиях никак не зависящая от свойств эталонов наблюдателя, в масштабах элементарных частиц становится жестко зависимой от них, в частности, от величины угловой скорости вращения пространства.

Таким образом, у нас появилась возможность на основе закона квантования масс определить частоты вращения пространства наблюдателя, соответствующие массам покоя элементарных частиц нашего мира. Результаты этих расчетов приведены в Таблице 4.1.

Результаты вычислений в этой таблице свидетельствуют: в масштабах элементарных частиц пространство наблюдателя в принципе неголономно. Например, при наблюдении электрона (его классический радиус $r_e = 2.8 \times 10^{-13}$ см) линейная скорость вращения пространства наблюдателя составляет $v = \Omega r = 2200$ км/сек*. Поскольку размеры остальных элементарных частиц еще меньше, это значение линейной скорости вращения пространства наблюдателя, повидимому, является наибольшим (предельным)†.

Итак, что же мы получили? Обычно наблюдатель сравнивает результаты измерений с эталонами на теле отсчета, но сам он и тело отсчета никак не связаны с наблюдаемым объектом и не влияют на него в процессе измерений. Поэтому в обычных макроусловиях нет никакой зависимости истинных характеристик наблюдаемых тел (например, массы покоя частицы) от характеристик тела и пространства отсчета — они могут быть любыми, как у взаимно *не связанных* объектов. Иначе говоря, хотя наблюдаемые объекты искажены из-за влияния на них эталонов наблюдателя, собственно наблюдатель и его тело отсчета в макроусловиях никак не влияют на измеряемые объекты. Другое дело — пространство в масштабах элементарных частиц. В этом параграфе мы убедились: как только мы достигаем таких малых масштабов, что спин, квантовая характеристика частицы, начинает оказывать ощутимое влияние на ее движение — все, — между физическими характеристиками пространства

---

*Величина v равна скорости электрона на первой боровской орбите, хотя при вычислении скорости вращения пространства (Табл. 4.1) мы рассматривали *свободный электрон*, т.е. электрон вне связи с атомным ядром и квантованием орбит в атоме водорода. Это связано с тем, что, по-видимому, "генетическая" квантовая неголономность пространства не только определяет массы покоя элементарных частиц, но также является причиной орбитального вращения электронов в атомах.

†Интересно, что угловые скорости вращения пространства барионов (Табл. 4.1) с точностью до порядка совпадают с частотой $\sim 10^{23}$ сек$^{-1}$, характеризующей элементарные частицы как осцилляторы [27, 28].

Название частицы	Масса покоя в массах m_e	Спин	Ω, сек$^{-1}$
Лептоны			
электрон e^-, позитрон e^+	1	1/2	7.782×10^{20}
электронное нейтрино ν_e и электронное антинейтрино $\tilde{\nu}_e$	$<4\times10^{-4}$	1/2	$<3\times10^{17}$
μ-мезонное нейтрино ν_μ и μ-мезонное антинейтрино $\tilde{\nu}_\mu$	<8	1/2	$<6\times10^{21}$
μ^--мезон, μ^+-мезон	206.766	1/2	1.609×10^{23}
Барионы			
нуклоны			
протон p, антипротон $\tilde{p}$	1836.09	1/2	1.429×10^{24}
нейтрон n, антинейтрон $\tilde{n}$	1838.63	1/2	1.431×10^{24}
гипероны			
Λ^0-гиперон, анти-Λ^0-гиперон	2182.75	1/2	1.699×10^{24}
Σ^+-гиперон, анти-Σ^+-гиперон	2327.6	1/2	1.811×10^{24}
Σ^--гиперон, анти-Σ^--гиперон	2342.6	1/2	1.823×10^{24}
Σ^0-гиперон, анти-Σ^0-гиперон	2333.4	1/2	1.816×10^{24}
Ξ^--гиперон, анти-Ξ^--гиперон	2584.7	1/2	2.011×10^{24}
Ξ^0-гиперон, анти-Ξ^0-гиперон	2572	1/2	2.00×10^{24}
Ω^--гиперон, анти-Ω^--гиперон	3278	3/2	8.50×10^{23}

Таблица 4.1: Частоты вращения пространства элементарных частиц.

(тела) отсчета и самой частицы тотчас же устанавливается жесткая взаимосвязь, т.е. тело отсчета начинает *влиять* на саму наблюдаемую частицу. Иначе говоря, наблюдатель уже не просто сравнивает характеристики наблюдаемого объекта со своими эталонами, а непосредственно *влияет* на наблюдаемый объект, формируя его характеристики в четкой квантовой зависимости от свойств эталонов, имеющихся в его распоряжении (тело и пространство отсчета).

Это означает: когда мы рассматриваем эффекты в масштабах элементарных частиц, например, спиновые эффекты, *стирается грань* между наблюдателем, т.е. его телом отсчета, и наблюдаемым объектом — элементарной частицей. Поэтому появляется возможность установить *взаимосвязь* между полем неголономности пространства отсчета, связанного с наблюдателем, и массами покоя наблюдаемых частиц — объектов наблюдений, в макромасштабах не связанных с телом отсчета. Таким образом, обнаруженные законы квантования масс справедливы только для элементарных частиц.

Напомним, этот результат получен исключительно геометрическими методами Теории Относительности, вне связи с вероятностным аппаратом квантовой механики, и, поэтому, может в будущем послужить "мостом", соединяющим эти две отрасли науки.

§ 4.9 Комптоновская длина волны

Итак, в наших исследованиях частота неголономности пространства наблюдателя при наблюдении элементарной частицы массой m_0 равна $\Omega = \frac{m_0 c^2}{2n\hbar}$ (4.251). Вычислим длину волны, соответствующую этой частоте. Полагая, что эта волна, т.е. волна неголономности пространства наблюдателя, распространяется со скоростью света $\lambda\Omega = c$, имеем

$$\lambda = \frac{c}{\Omega} = 2n\frac{\hbar}{m_0 c}\,, \tag{4.252}$$

т.е. при наблюдении массовой частицы со спином $n = \frac{1}{2}$ длина волны неголономности (вращения) пространства наблюдателя равна комптоновской длине волны этой частицы $\bar{\lambda}_{\rm c} = \frac{\hbar}{m_0 c}$.

Что это означает? Комптон-эффект — "рассеяние" фотона на свободном электроне, сопровождающееся уменьшением его собственной частоты

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{m_{\rm e} c}\left(1 - \cos\vartheta\right) = \lambda_{\rm c}^{\rm e}\left(1 - \cos\vartheta\right), \tag{4.253}$$

был обнаружен Артуром Комптоном в 1922 году. Здесь λ_1 и λ_2 длина волн фотона до и после соударения, ϑ угол "рассеяния". Множитель $\lambda_{\rm c}^{\rm e}$, характерный для электрона, в те годы назвали ***комптоновской длиной волны*** электрона. Впоследствии выяснилось, что для других элементарных частиц в процессе "рассеяния" фотонов также проявляется характерная длина волны $\lambda_{\rm c} = \frac{h}{m_0 c}$, или, соответственно, $\bar{\lambda}_{\rm c} = \frac{\hbar}{m_0 c}$, т.е. для каждого типа элементарных частиц (электронов, протонов, нейтронов и т.д.) существует своя комптоновская длина волны. Физический смысл этой величины был выяснен позднее. Оказалось, что в области, меньшей $\bar{\lambda}_{\rm c}$, элементарная частица перестает быть точечным объектом и ее взаимодействие с другими частицами (и с наблюдателем) характеризуется законами квантовой механики. Поэтому область диаметром $\bar{\lambda}_{\rm c}$ иногда интерпретируют как "размер" элементарной частицы в том условном смысле, в котором само понятие "размер" может быть применено к элементарным частицам.

Применительно к нашим результатам, полученным в предыдущем параграфе, это означает: при наблюдении массовой элементар-

ной частицы угловая скорость вращения пространства отсчета наблюдателя возрастает настолько, что длина волны, соответствующей этой скорости, становится равной комптоновской длине волны наблюдаемой частицы, т.е. ее "размеру", внутри которого частица перестает быть точечным объектом. Иначе говоря, именно угловая скорость вращения (длина "волны неголономности") пространства наблюдателя определяет наблюдаемые комптоновские длины (характерные "размеры") массовых элементарных частиц.

§4.10 Безмассовая частица со спином

Так как безмассовые (светоподобные) частицы не обладают электрическим зарядом, их скалярные уравнения движения в нашем мире и в зазеркалье имеют вид, соответственно,

$$\frac{d}{d\tau}\left(m+\frac{\eta}{c^2}\right)=0\,,\qquad -\frac{d}{d\tau}\left(m+\frac{\eta}{c^2}\right)=0\,. \tag{4.254}$$

При их интегрировании константа интегрирования всегда равна нулю, поэтому в любом случае получаются выражения (4.239). Следовательно для безмассовых частиц нашего мира и для безмассовых частиц зазеркалья, соответственно,

$$mc^2=-\,\eta\,,\qquad mc^2=\eta\,. \tag{4.255}$$

Вместе с тем такого понятия, как "масса покоя" для безмассовых частиц, не существует — они пребывают в непрерывном движении. Их релятивистские массы определяются исходя из энергетического эквивалента $E=mc^2$, измеряемого в электрон-вольтах. Соответственно, для безмассовых частиц не существует и спин-энергия покоя $\eta_0=n\hbar^{mn}A_{mn}$.

Тем не менее очевидно, что тензор Планка, содержащийся в спин-энергии η, создает условия квантования релятивистских масс безмассовых частиц и угловых скоростей вращения пространства. Следовательно, чтобы вычислить угловые скорости вращения пространства для безмассовых частиц, нам необходимо получить развернутое выражение для их релятивистской спин-энергии η, структура которой исключала бы наличие релятивистского корня.

В квантовой механике для безмассовых частиц вводится понятие *спиральность* — проекция спина на направление импульса. Основанием для введения такого понятия является тот факт, что безмассовая частица не может покоится относительно обычного наблюдателя, т.к. всегда движется относительно него со скоростью света. Поэтому вполне естественно считать спин безмассовой частицы

ориентированным по касательной к светоподобной траектории (либо сонаправлено, либо противоположно направленно к ней).

Учитывая, что спиновое квантовое число n безмассовых частиц равно 1, будем полагать для них

$$\eta = \hbar^{mn}\tilde{A}_{mn}\,, \tag{4.256}$$

где $\tilde{A}_{mn}$ трехмерный тензор угловых скоростей вращения пространства безмассовых частиц (светоподобного пространства).

Таким образом, чтобы вычислить релятивистскую спин-энергию безмассовой частицы (4.256), нам необходимо определить компоненты тензора угловых скоростей вращения светоподобного пространства. Построим этот тензор по аналогии с четырехмерным тензором угловой скорости $A^{\alpha\beta}$ (4.11), характеризующим вращение пространства некоторой системы отсчета, движущейся относительно наблюдателя и его тела отсчета с произвольной скоростью (несопутствующая система отсчета). В результате получим

$$\tilde{A}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,c\tilde{h}^{\alpha\mu}\tilde{h}^{\beta\mu}\tilde{a}_{\mu\nu}\,, \qquad \tilde{a}_{\mu\nu} = \frac{\partial\tilde{b}_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial\tilde{b}_\mu}{\partial x^\nu}\,, \tag{4.257}$$

где $\tilde{b}^\alpha$ в данном случае — четырехмерная скорость светоподобной системы отсчета относительно наблюдателя, и

$$\tilde{h}^{\alpha\mu} = -\,g^{\alpha\mu} + \tilde{b}^\alpha\tilde{b}^\mu \tag{4.258}$$

четырехмерное обобщение “наблюдаемого” метрического тензора пространства светоподобной системы отсчета.

Пространство, в котором обитают безмассовые частицы, есть область четырехмерного пространства-времени, соответствующая четырехмерным образующим изотропного (светового) конуса, описываемого уравнением $g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha dx^\beta = 0$. Этот конус существует в любой точке риманова пространства со знакопеременной сигнатурой $(+---)$, т.е. в любой точке четырехмерного псевдориманова пространства. Четырехмерный вектор скорости светоподобной системы отсчета безмассовых частиц имеет вид

$$\tilde{b}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\sigma} = \frac{dx^\alpha}{cd\tau}\,, \qquad \tilde{b}_\alpha\tilde{b}^\alpha = 0\,, \tag{4.259}$$

его физические наблюдаемые компоненты в системе отсчета обычного досветового наблюдателя равны

$$\frac{\tilde{b}_0}{\sqrt{g_{00}}} = \pm 1, \qquad \tilde{b}^i = \frac{1}{c}\frac{dx^i}{d\tau} = \frac{1}{c}\;c^i, \tag{4.260}$$

остальные компоненты изотропного вектора (4.259)

$$\tilde{b}^0 = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\left(\frac{1}{c^2}\,v_i c^i \pm 1\right), \qquad \tilde{b}_i = -\frac{1}{c}\,(c_i \pm v_i)\,, \tag{4.261}$$

здесь c^i трехмерный хронометрически инвариантный вектор скорости света.

Рассмотрим данные характеристики пространства безмассовой частицы более подробно. Условие изотропности четырехмерного вектора скорости безмассовой частицы $b_\alpha b^\alpha = 0$ в хронометрически инвариантной форме принимает вид

$$h_{ik}\,c^i c^k = c^2 = const, \tag{4.262}$$

где h_{ik} наблюдаемый метрический тензор пространства отсчета (обычного, т.е. досветового наблюдателя). Компоненты четырехмерного тензора $\tilde{h}^{\alpha\beta}$ (4.258), трехмерные компоненты которого составляют наблюдаемый метрический тензор пространства безмассовой частицы $\tilde{h}^{ik}$, таковы

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{h}^{00} = \frac{v_k v^k \pm 2v_k c^k + \frac{1}{c^2}\,v_k v_n c^k c^n}{c^2\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2} \\ &\tilde{h}^{0i} = \frac{v^i \pm c^i + \frac{1}{c^2}\,v_k c^k c^i}{c\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)}\,, \qquad \tilde{h}^{ik} = h^{ik} + \frac{1}{c^2}\,c^i c^k \end{aligned}\right\}, \tag{4.263}$$

где знак "плюс" относится к пространству с прямым ходом времени (наш мир) и знак "минус" — к пространству с обратным ходом времени (зазеркалье). Теперь осталось вычислить компоненты ротора четырехмерного вектора скорости безмассовой частицы, входящего в выражение для тензора вращения пространства безмассовой частицы (4.257). Вычисляя, получаем

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{a}_{00} = 0\,, \quad \tilde{a}_{0i} = \frac{1}{2c^2}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\left(\pm F_i - \frac{{}^*\partial c_i}{\partial t}\right) \\ &\tilde{a}_{ik} = \frac{1}{2c}\left(\frac{\partial c_i}{\partial x^k} - \frac{\partial c_k}{\partial x^i}\right) \pm \frac{1}{2c}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x^k} - \frac{\partial v_k}{\partial x^i}\right) \end{aligned}\right\}. \tag{4.264}$$

Вообще для определения спин-энергии безмассовой частицы (4.256) нам необходимы ковариантные пространственные компоненты тензора вращения ее пространства, т.е. компоненты с нижними

индексами $\tilde{A}_{ik}$. Чтобы вычислить их, возьмем выражение для контравариантных компонент $\tilde{A}^{ik}$, а затем опустим их индексы, как для любой хронометрически инвариантной величины, с помощью трехмерного наблюдаемого метрического тензора пространства отчета наблюдателя.

Подставляя в выражение

$$\tilde{A}^{ik} = c\left(\tilde{h}^{i0}\tilde{h}^{k0}\,\tilde{a}_{00}+\tilde{h}^{i0}\tilde{h}^{km}\,\tilde{a}_{0m}+\tilde{h}^{im}\tilde{h}^{k0}\,\tilde{a}_{m0}+\tilde{h}^{im}\tilde{h}^{kn}\,\tilde{a}_{mn}\right) \quad (4.265)$$

вычисленные компоненты $\tilde{h}^{\alpha\beta}\ \tilde{a}_{\alpha\beta}$, получаем

$$\begin{aligned}\tilde{A}^{ik} = h^{im}h^{kn}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial c_m}{\partial x^n}-\frac{\partial c_n}{\partial x^m}\right)+\frac{1}{2c^2}\left(F_n c_m - F_m c_n\right)\right] \pm \\ \pm\, h^{im}h^{kn}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_m}{\partial x^n}-\frac{\partial v_n}{\partial x^m}\right)+\frac{1}{2c^2}\left(F_n v_m - F_m v_n\right)\right] + \\ + \left(\frac{1}{c^2}\,v_n c^n \pm 1\right)\left(c^k h^{im} - c^i h^{km}\right)\frac{{}^*\partial c_m}{\partial t} - \\ - \left(v^k h^{im} - v^i h^{km}\right)\frac{{}^*\partial c_m}{\partial t} + \frac{1}{2c^2}\,c^m\left(c^i h^{kn} - c^k h^{in}\right) \times \\ \times \left[\left(\frac{\partial c_m}{\partial x^n}-\frac{\partial c_n}{\partial x^m}\right) \pm \left(\frac{\partial v_m}{\partial x^n}-\frac{\partial v_n}{\partial x^m}\right)\right].\end{aligned} \quad (4.266)$$

Величина $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_m}{\partial x^n}-\frac{\partial v_n}{\partial x^m}\right)+\frac{1}{2c^2}\left(F_n v_m - F_m v_n\right)$, по определению, есть хронометрически инвариантный (наблюдаемый) тензор угловых скоростей вращения пространства отсчета наблюдателя A_{mn}, т.е. ***тензор неголономности неизотропного пространства****.

Величина $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial c_m}{\partial x^n}-\frac{\partial c_n}{\partial x^m}\right)+\frac{1}{2c^2}\left(F_n c_m - F_m c_n\right)$ по своей структуре аналогична тензору A_{mn}, только вместо скорости вращения v_i неизотропного пространства наблюдателя здесь стоят компоненты ковариантного вектора скорости света $c_m = h_{mn}c^n$, являющегося физической наблюдаемой величиной (т.к. он получен опусканием индекса у хронометрически инвариантного вектора c^n с помощью хронометрически инвариантного метрического тензора h_{mn}). Обозначим этот тензор $\breve{A}_{mn}$, где полумесяц, обращенный вверх, символизирует принадлежность указанной величины к *изотропному про-*

*Будем называть *неизотропным пространством* область четырехмерного пространства-времени, в которой существуют частицы с ненулевой массой покоя. Эта область мировых траекторий, вдоль которых $ds \neq 0$. Соответственно, если интервал ds вещественный, то скорости частиц досветовые (обычные частицы), если мнимый, то скорости частиц сверхсветовые (тахионы). Пространство и тех и других частиц является неизотропным по определению.

*странству** с прямым ходом времени — "верхней" части светового конуса, принимающего в искривленном пространстве-времени "округлые" очертания. Тогда

$$\breve{A}_{mn} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial c_m}{\partial x^n} - \frac{\partial c_n}{\partial x^m}\right) + \frac{1}{2\,c^2}\left(F_n c_m - F_m c_n\right). \qquad (4.267)$$

В частном случае, когда гравитационный потенциал пренебрежимо мал (т.е. где $\mathrm{w} \approx 0$), этот тензор принимает вид

$$\breve{A}_{mn} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial c_m}{\partial x^n} - \frac{\partial c_n}{\partial x^m}\right), \qquad (4.268)$$

т.е. представляет собой хронометрически инвариантный вихрь трехмерного наблюдаемого вектора скорости света. Поэтому мы будем называть величину $\breve{A}_{mn}$ *вихрем изотропного пространства.*

Геометрически представить себе вихрь изотропного пространства можно на следующем примере. Как известно, необходимым и достаточным условием равенства нулю тензора $A_{mn} = 0$ (условием голономности пространства) является обращением в нуль всех компонент $v_i = -c\,\frac{g_{0i}}{\sqrt{g_{00}}}$, т.е. отсутствие вращения пространства. Тензор $\breve{A}_{mn}$ определен только для изотропного пространства, заполненного безмассовыми частицами. Вне изотропного пространства он теряет смысл, т.к. "внутри" светового конуса обитают досветовые частицы, а "снаружи" — тахионы. Нас интересуют безмассовые частицы, обладающие спином, т.е. фотоны. Из выражения (4.268) следует, что наличие поля неголономности изотропного пространства неразрывно связано с вихревым характером скорости движения безмассовых частиц c_m. Таким образом, фотоны — это вихри изотропного пространства. А спин фотонов — результат взаимодействия внутреннего поля этого вихря с внешним поле тензора $\breve{A}_{mn}$.

Для большей наглядности представим области существования частиц разных типов. Световой конус существует в каждой точке пространства. Уравнение светового конуса $g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha dx^\beta = 0$, записанное в хронометрически инвариантной форме, имеет вид

$$c^2\tau^2 - h_{ik}\,x^i x^k = 0\,, \qquad h_{ik}\,x^i x^k = \sigma^2. \qquad (4.269)$$

---

*Назовем *изотропным пространством* область четырехмерного пространства-времени, в котором обитают безмассовые (светоподобные) частицы. Эту область можно также назвать *световой мембраной.* С геометрической точки зрения световая мембрана — это поверхность изотропного конуса, т.е. совокупность его четырехмерных образующих (мировых линий распространения света).

Световой конус на диаграмме Минковского "внутри" заполнен неизотропным пространством, в котором и обитают досветовые массовые частицы. "Снаружи" также находится область неизотропного пространства, в которой обитают сверхсветовые частицы (тахионы). Собственно изотропное пространство безмассовых частиц представляет собой *пространственно-временную мембрану* между этими двумя неизотропными областями. Картина зеркальна: в верхней части конуса расположено досветовое пространство с прямым ходом времени (наш мир), отделенное пространственным сечением от нижней части — досветового пространства с обратным ходом времени (зазеркалье). Иначе говоря, в верхней части обитают вещественные частицы с положительными массами и энергиями, а в нижней части — их зеркальные "партнеры", массы и энергии которых (с нашей точки зрения) отрицательны. Таким образом, вращение досветового неизотропного пространства раскручивает окружающую световую мембрану (изотропное пространство светового конуса). В результате световой конус приобретает вращение, характеризуемое тензором $\breve{A}_{mn}$ — вихрем изотропного пространства.

Теперь вернемся к выражению для релятивистской спин-энергии безмассовой частицы $\eta=\hbar^{mn}\tilde{A}_{mn}$ (4.256). Опуская индексы у контравариантного тензора неголономности изотопного пространства $\tilde{A}^{ik}$ (4.266), получаем

$$\tilde{A}_{ik}=\pm A_{ik}+\breve{A}_{ik}+\frac{1}{2c^2}c^m\left\{c_i\left[\frac{\partial\,(c_m\pm v_m)}{\partial x^k}-\frac{\partial\,(c_k\pm v_k)}{\partial x^m}\right]-\right.$$
$$\left.-\,c_k\left[\frac{\partial\,(c_m\pm v_m)}{\partial x^i}-\frac{\partial\,(c_i\pm v_i)}{\partial x^m}\right]\right\}+\left(v_i\frac{^*\partial c_k}{\partial t}-v_k\frac{^*\partial c_i}{\partial t}\right)+ \tag{4.270}$$
$$+\left(\frac{1}{c^2}v_n v^n\pm 1\right)\left(c_k\frac{^*\partial c_i}{\partial t}-c_i\frac{^*\partial c_k}{\partial t}\right).$$

Свертывая эту величину $\tilde{A}_{ik}$ с тензором Планка $\hbar^{ik}$, имеем

$$\eta=\eta_0+n\hbar^{ik}\breve{A}_{ik}+\left[\left(\frac{1}{c^2}v_n v^n\pm 1\right)\left(c_k\frac{^*\partial c_i}{\partial t}-c_i\frac{^*\partial c_k}{\partial t}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(v_i\frac{^*\partial c_k}{\partial t}-v_k\frac{^*\partial c_i}{\partial t}\right)\right]n\hbar^{ik}+\frac{1}{2c^2}n\hbar^{ik}c^m\left\{c_i\left[\frac{\partial\,(c_m\pm v_m)}{\partial x^k}-\right.\right. \tag{4.271}$$
$$\left.\left.-\frac{\partial\,(c_k\pm v_k)}{\partial x^m}\right]-c_k\left[\frac{\partial\,(c_m\pm v_m)}{\partial x^i}-\frac{\partial\,(c_i\pm v_i)}{\partial x^m}\right]\right\},$$

где "плюс" имеет место в нашем мире, "минус" — в зазеркалье. Величина $\eta_0=\eta\sqrt{1-\mathrm{v}^2/c^2}$ для безмассовых частиц равна нулю, т.к. они

движутся со скоростью света. Отсюда, учитывая, что $\eta_0 = n\hbar^{mn}A_{mn}$, мы получаем дополнительное условие, накладываемое на тензор неголономности изотропного пространства $\tilde{A}_{ik}$: в том месте, где проходит траектория безмассовой частицы, должно выполняться соотношение

$$\hbar^{mn}A_{mn} = 2\hbar\left(A_{12} + A_{23} + A_{31}\right) = 0\,, \qquad (4.272)$$

или, в другой форме записи, $\Omega^1 + \Omega^2 + \Omega^3 = 0$.

Таким образом, в том месте, где наблюдатель фиксирует безмассовую частицу, угловая скорость вращения неизотропного пространства наблюдателя равна нулю. Остальные члены в выражении для релятивистской спин-энергии безмассовой частицы (4.271) обусловлены возможной нестационарностью скорости света $\frac{{}^*\partial c_i}{\partial t}$ и зависимостями, квадратичными по скорости света. Исследуем полученное выражение (4.271), сделав два упрощающих предположения:

1) гравитационный потенциал пренебрежимо мал ($\mathrm{w} \approx 0$);
2) трехмерный хронометрически инвариантный вектор скорости света является стационарным.

В этом случае выражения для A_{ik} и $\breve{A}_{ik}$, т.е. для тензора неголономности пространства наблюдателя и для вихря изотропного пространства, принимают вид

$$A_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x^i} - \frac{\partial v_i}{\partial x^k}\right), \qquad \breve{A}_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial c_k}{\partial x^i} - \frac{\partial c_i}{\partial x^k}\right). \qquad (4.273)$$

Соответственно, релятивистская спин-энергия безмассовой частицы (4.271)) принимает следующий вид

$$\eta = n\left(\hbar^{ik}\breve{A}_{ik} + \frac{1}{c^2}\,c_i c^m \hbar^{ik}\breve{A}_{km}\right). \qquad (4.274)$$

Таким образом, величина η (4.274), характеризующая проявление спина безмассовой частицы, определяется (помимо спина самой частицы) исключительно вихрем изотропного пространства и никак не зависит от неголономности (вращения пространства отсчета наблюдателя.

Для конкретных расчетов полученную величину η (4.274) удобно преобразовать следующим образом. По аналогии с псевдовектором угловой скорости вращения пространства отсчета наблюдателя $\Omega^{*i} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{ikm}A_{km}$ введем псевдовектор

$$\breve{\Omega}^{*i} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{ikm}\breve{A}_{km}\,, \qquad (4.275)$$

который формально можно рассматривать как псевдовектор угловой скорости вращения изотропного пространства, т.е. пространства, в котором существуют лишь изотропные кривые — траектории безмассовых частиц, движущихся со скоростью света. Соответственно, $\breve{A}_{km} = \varepsilon_{kmn}\breve{\Omega}^{*n}$. Тогда η (4.274) можно записать в виде

$$\eta = n\left(\hbar_{*i}\breve{\Omega}^{*i} + \frac{1}{c^2}\,c_i c^m \hbar^{ik}\,\varepsilon_{kmn}\breve{\Omega}^{*n}\right). \tag{4.276}$$

Иными словами, внутренний вихрь (спин) безмассовой частицы проявляется лишь во взаимодействии с вихрем самого изотропного пространства. Результат этого взаимодействия — скалярное произведение $\hbar_{*i}\breve{\Omega}^{*i}$, с которым отождествляется спин безмассовой частицы. Следовательно безмассовые частицы — это элементарные светоподобные вихри самого изотропного пространства.

Теперь оценим скорости вращения изотропного пространства для безмассовых частиц различных энергий. На сегодняшний день точно известно, что к безмассовым частицам относятся фотоны — кванты электромагнитного поля. Спиновое квантовое число фотонов равно 1. Кроме того, их энергия $E = \hbar\omega$ в нашем мире принимает положительные значения. Поэтому, с учетом интеграла живых сил (4.255), для наблюдаемых фотонов нашего мира имеем

$$\hbar\omega = \hbar_{*i}\breve{\Omega}^{*i} + \frac{1}{c^2}\,c_i c^m \hbar^{ik}\,\varepsilon_{kmn}\breve{\Omega}^{*n}. \tag{4.277}$$

Будем полагать, что псевдовектор вращения изотропного пространства Ω^{*i} направлен вдоль оси z, а вектор скорости света — вдоль оси y. Тогда полученное для фотонов соотношение (4.277) принимает вид $\hbar\omega = 2\hbar\breve{\Omega}$, или, после сокращения на $\hbar$,

$$\breve{\Omega} = \frac{\omega}{2} = \frac{2\pi\nu}{2} = \pi\nu\,, \tag{4.278}$$

т.е. частота $\breve{\Omega}$ вихря изотропного пространства, взаимодействующего со спином фотона, по порядку совпадает с его собственной частотой ν. Пользуясь этим соотношением, являющимся следствием закона квантования релятивистских масс светоподобных частиц, можно оценить величины угловых скоростей вращения изотропного пространства, соответствующих фотонам (квантам электромагнитного поля) с различными энергиями. Результаты приведены в Таблице 4.2.

Таким образом, угловые скорости вращения изотропного пространства фотонов в диапазоне гамма-лучей лежат в диапазоне час-

Вид фотонов	Диапазон $\breve{\Omega}$, сек$^{-1}$
радиоволны	$10^3 \div 10^{11}$
инфракрасные лучи	$10^{11} \div 1.2\times10^{15}$
видимый свет	$1.2\times10^{15} \div 2.4\times10^{15}$
ультрафиолетовые лучи	$2.4\times10^{15} \div 10^{17}$
рентгеновские лучи	$10^{17} \div 10^{19}$
гамма-лучи	$10^{19} \div 10^{23}$ и более

Таблица 4.2: Частоты вращения изотропного пространства, соответствующие фотонам различных длин волн.

тот вращения обычного (неизотропного) пространства электрона и других элементарных частиц (Табл. 4.2).

§4.11 Заключение

Подводя итог этой главе, мы можем констатировать следующее. Спин частицы характеризуется четырехмерным антисимметричным тензором 2-го ранга (тензором Планка), диагональные и пространственно-временные координаты которого равны нулю, а перекрестные пространственные компоненты численно равны $\pm\hbar$ в зависимости от ориентации спина в пространстве и выбора правой или левой системы координат. Спин (внутренний вихрь частицы) взаимодействует с внешним полем неголономности пространства, в результате чего частица приобретает дополнительный импульс, отклоняющий ее траекторию от геодезической линии. Энергия этого взаимодействия входит в скалярное уравнение движения (теорему живых сил), которое необходимо учитывать при решении векторных (пространственных) уравнений движения частицы. Частным решением скалярного уравнения движения является закон квантования масс элементарных частиц со спином, устанавливающий однозначную зависимость между массами покоя элементарных частиц и угловыми скоростями вращения пространства наблюдателя, а также между релятивистскими массами фотонов и угловыми скоростями вращения их изотропного (светоподобного) пространства. Так как область существования светоподобных частиц — это область четырехмерных изотропных траекторий, то понятия "изотропное пространство" и "светоподобное пространство" можно считать синонимами.

Глава 5 Физический вакуум

§ 5.1 Введение

Средняя плотность материи в нашей Вселенной по последним данным составляет $\sim 5 \div 10 \times 10^{-30}$ грамм/см^3. Средняя плотность вещества в галактиках еще больше ($\sim 10^{-24}$ грамм/см^3), что, возможно, связано с существованием так называемой "скрытой массы" галактик. Кроме того, согласно астрономическим наблюдениям, большая часть массы собрана в компактных объектах, например, звездах, занимающих несопоставимо ничтожную долю объема всей Вселенной ("островное" распределение вещества). Таким образом, можно считать что наша Вселенная в среднем состоит почти из пустоты.

Длительное время между понятиями "пустота" и "вакуум" ставили знак равенства. Однако, начиная с 20-х годов XX-го века, применение геометрических методов Общей Теории Относительности показало, что пустота и вакуум представляют собой различные состояния материи.

Распределение материи в пространстве характеризуется тензором энергии-импульса, который связан с геометрической структурой пространства-времени (фундаментальным метрическим тензором) *уравнениями поля*. В теории тяготения Эйнштейна, являющейся одним из применений Общей Теории Относительности*, уравнения поля имеют вид

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\, g_{\alpha\beta} R = -\varkappa T_{\alpha\beta} + \lambda g_{\alpha\beta}\,. \tag{5.1}$$

Эти уравнения поля, называемые уравнениями Эйнштейна†, помимо тензора энергии-импульса и фундаментального метрического тензора, включают в себя следующие величины:

---

*Общая Теория Относительности исторически была сформулирована как представление о геометрической структуре нашего мира в виде четырехмерного (в общем случае искривленного, неоднородного и анизотропного) псевдориманова пространства со всеми вытекающими из этого кинематическими и динамическими эффектами. Это дало возможность применить чисто геометрические методы римановой геометрии для исследования Вселенной, в частности, позволило Эйнштейну в дальнейшем предложить уравнения поля и построить на их основе релятивистское обобщение ньютоновской теории тяготения.

†Часто левую часть уравнений (5.1) называют *тензором Эйнштейна* $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\, g_{\alpha\beta} R$, записывая в виде $G_{\alpha\beta} = -\varkappa T_{\alpha\beta} + \lambda g_{\alpha\beta}$.

1) $R_{\alpha\sigma} = R_{\alpha\beta\sigma\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\beta}$ тензор Риччи* — результат свертывания тензора кривизны Римана-Кристоффеля $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ по двум индексам;
2) $R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$ скалярная кривизна;
3) $\varkappa = \frac{8\pi G}{c^2} = 1.862 \times 10^{-27}$ [см/грамм] постоянная Эйнштейна, где $G = 6.672 \times 10^{-8}$ [см^3/ грамм сек^2] гравитационная постоянная. Однако, некоторые авторы в качестве коэффициента используют величину $\varkappa = \frac{8\pi G}{c^4}$ (как у Ландау и Лифшица [10]) вместо $\varkappa = \frac{8\pi G}{c^2}$. Чтобы понять, в чем тут дело, рассмотрим хронометрически инвариантные (наблюдаемые) компоненты тензора энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$: $\frac{T_{00}}{g_{00}} = \rho$ наблюдаемую плотность массы, $\frac{c T_0^i}{\sqrt{g_{00}}} = J^i$ вектор наблюдаемой плотности импульса, $c^2 T^{ik} = U^{ik}$ тензор наблюдаемой плотности потока импульса (см. работы Зельманова [11–13]). Скалярная наблюдаемая компонента уравнений Эйнштейна $\frac{G_{00}}{g_{00}} = -\frac{\varkappa T_{00}}{g_{00}} + \lambda$. Как известно, размерность тензора Риччи [см$^{-2}$], следовательно, и тензора Эйнштейна $G_{\alpha\beta}$ также. Тогда очевидно, что $\frac{\varkappa T_{00}}{g_{00}} = \frac{8\pi G\rho}{c^2}$ также имеет размерность [см$^{-2}$]. Таким образом, размерность тензора энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$ равна размерности плотности массы [грамм/см^3]. Это, в частности, означает, что, когда в качестве коэффициента в правой части уравнений Эйнштейна стоит $\frac{8\pi G}{c^4}$, в действительности используется не собственно тензор энергии-импульса, а величина $c^2 T_{\alpha\beta}$, скалярная наблюдаемая компонента которой представляет собой плотность энергии $\frac{c^2 T_{00}}{g_{00}} = \rho c^2$, а векторная наблюдаемая компонента — поток энергии $\frac{c^3 T_0^i}{\sqrt{g_{00}}} = c^2 J^i$;
4) λ [см$^{-2}$] космологический член, характеризующий неньютоновские силы притяжения или отталкивания в зависимости от знака λ (при $\lambda > 0$ отталкивание, при $\lambda < 0$ притяжение). Эта величина называется космологической, т.к. считается, что силы, характеризуемые λ-членом, увеличиваются пропорционально расстоянию, поэтому их проявления лучше заметны на "космологических" расстояниях, сравнимых с размерами всей Вселенной. Поскольку неньютоновские гравитационные поля (λ-поля) не наблюдались, для нашей Вселенной в целом космологический член $|\lambda| < 10^{-56}$ cm^{-2}.

*Грегорио Риччи-Курбастро (1853–1925), итальянский математик, бывший учеником Туллио Леви-Чивиты в Падуе, в 1890-е.

Из уравнений Эйнштейна (5.1) видно, что тензор энергии-импульса (характеризующий распределение материи) генетически связан с метрическим тензором и тензором Риччи, а, следовательно, и с тензором кривизны Римана-Кристоффеля. Равенство тензора Римана-Кристоффеля нулю является необходимым и достаточным условием того, чтобы данное пространство-время было плоским. Тензор Римана-Кристоффеля отличен от нуля для искривленного пространства. Он проявляется в виде приращения вектора V^{α} при его параллельном переносе по замкнутому контуру

$$\Delta V^{\mu} = -\frac{1}{2}\, R_{\alpha\beta\gamma\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\mu} V^{\alpha} \Delta\sigma^{\beta\gamma}, \tag{5.2}$$

где $\Delta\sigma^{\beta\gamma}$ площадь данного контура. В результате исходный вектор V^{α} и вектор $V^{\alpha}+\Delta V^{\alpha}$ различаются по направлению. Количественно эта разница характеризуется величиной K, называемой *четырехмерной кривизной* псевдориманова пространства в направлении данного параллельного переноса (подробнее см. Главу 9 в лекциях Зельманова [12])

$$K = \lim_{\Delta\sigma\to 0} \frac{\tan\varphi}{\Delta\sigma}\,, \tag{5.3}$$

где $\tan\varphi$ тангенс угла между вектором V^{α} и проекцией вектора $V^{\alpha}+\Delta V^{\alpha}$ на площадку, ограничивающую контур переноса. Например, возьмем некоторую поверхность и на ней "геодезический" треугольник, образованный пересечением трех геодезических линий. Перенесем какой-либо вектор, определенный в одной из точек этого треугольника, параллельно самому себе вдоль его сторон. Суммарный угол поворота φ после возвращения вектора в исходную точку $\varphi=\Sigma-\pi$ (где Σ сумма внутренних углов треугольника). Пусть кривизна поверхности K одинакова во всех ее точках, тогда

$$K = \lim_{\Delta\sigma\to 0} \frac{\tan\varphi}{\Delta\sigma} = \frac{\varphi}{\sigma} = const, \tag{5.4}$$

где σ площадь треугольника, а величина $\varphi=K\sigma$ называется *сферическим избытком*. Если $\varphi=0$, то и кривизна $K=0$, т.е. поверхность является плоской. В этом случае сумма внутренних углов геодезического треугольника равна π (плоское пространство). Если $\Sigma>\pi$ (переносимый вектор поворачивается в направлении обхода), то имеется положительный сферический избыток и кривизна $K>0$. Пример такой поверхности — внешняя поверхность сферы: треугольник на сфере является выпуклым. Если $\Sigma<\pi$ (переносимый вектор поворачивается против направления обхода), то сферический избыток

отрицателен и кривизна $K<0$. Пример — внутренняя поверхность сферы: на ней треугольник является вогнутым.

Итак, Альберт Эйнштейн постулировал, что гравитация — это кривизна пространства-времени. Кривизна понимается им (как и в римановой геометрии вообще) как отличие от нуля тензора Римана-Кристоффеля $R_{\alpha\beta\gamma\delta}\neq 0$. Это концепция полностью содержит в себе концепцию гравитации Ньютона, а именно, эйнштейновская четырехмерная гравитация-кривизна проявляется для обычного физического наблюдателя в виде:

1) ньютоновской гравитации;
2) вращения трехмерного пространства;
3) деформации трехмерного пространства;
4) трехмерной кривизны, т.е. символы Кристоффеля отличны от нуля (см. §13.5 в лекциях Зельманова [12]).

Согласно принципу Маха, их которого выросла теория тяготения Эйнштейна, "…свойство инерции полностью обусловлено взаимодействием материи" [29], т.е. кривизна пространства-времени создается заполняющей его материей (в той или иной форме). Это позволяет дать на основе уравнений Эйнштейна (5.1) математические определения пустоты и вакуума.

Пустота — это состояние пространства-времени, при котором тензор Риччи $R_{\alpha\beta}=0$, т.е. отсутствуют вещество $T_{\alpha\beta}=0$ и неньютоновские гравитационные поля $\lambda=0$. Уравнения поля (5.1) в пустоте сводятся к тождеству $R_{\alpha\beta}=0$;*

Вакуум — это состояние, в котором отсутствует вещество $T_{\alpha\beta}=0$, но $\lambda\neq 0$ и, соответственно, $R_{\alpha\beta}\neq 0$. Пустота — частный случай вакуума в отсутствие λ-полей. Уравнения поля в вакууме принимают вид

$$R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}\,g_{\alpha\beta}R=\lambda g_{\alpha\beta}\,. \tag{5.5}$$

Система уравнений Эйнштейна применима к самым разнообразным распределениям материи за исключением тех случаев, когда плотность приближается к плотности вещества в атомных ядрах. Трудно строго математически исследовать все возможные случаи распределения материи, т.к. эта задача является слишком общей и

*Если записать уравнения Эйнштейна для пустого пространства $R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}\,g_{\alpha\beta}R=0$ в смешанном виде $R_{\alpha}^{\beta}-\frac{1}{2}\,g_{\alpha}^{\beta}R=0$, после свертывания $(R_{\alpha}^{\alpha}-\frac{1}{2}g_{\alpha}^{\alpha}R=0)$ получим $R-\frac{1}{2}\,4R=0$, т.е. скалярная кривизна в пустоте $R=0$. Следовательно, уравнения поля в пустом пространстве имеют вид $R_{\alpha\beta}=0$.

в таком виде не решается. Вместе с тем, средняя плотность вещества в нашей Вселенной настолько мала ($5\div 10\times 10^{-30}$ грамм/см^3), что можно считать ее состояние близким к вакууму. Уравнения Эйнштейна свидетельствуют: тензор энергии-импульса связан функциональной зависимостью с метрическим тензором и тензором Риччи (т.е. тензором кривизны, свернутым по двум индексам). При таких малых значениях плотности можно считать тензор энергии-импульса пропорциональным метрическому тензору $T_{\alpha\beta}\sim g_{\alpha\beta}$ и, следовательно, пропорциональным тензору Риччи. Таким образом, наряду с уравнениями поля в вакууме (5.5) можно рассматривать уравнения поля вида

$$R_{\alpha\beta} = k\,g_{\alpha\beta}\,, \qquad k = const, \tag{5.6}$$

т.е. когда тензор энергии-импульса отличается от метрического тензора лишь постоянным множителем. Этот случай, включающий в себя как случай отсутствия масс (вакуум), так и близкие к нему состояния и имеющий непосредственное отношение к нашей Вселенной, подробно исследовал А. З. Петров [30, 31]. Пространства такого типа, в которых тензор энергии-импульса пропорционален метрическому тензору (и тензору Риччи), он назвал *пространствами Эйнштейна.*

Пространства с $R_{\alpha\beta}=kg_{\alpha\beta}$ (пространства Эйнштейна) однородны на всем своем протяжении, в них нет потоков массы, а плотность заполняющей их материи (в том числе и вещества, при наличии такового) везде постоянна. В этом случае

$$R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} = k\,g_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} = 4k\,, \tag{5.7}$$

а тензор Эйнштейна имеет вид

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\,g_{\alpha\beta}R = -\,k\,g_{\alpha\beta}\,, \tag{5.8}$$

где величина $kg_{\alpha\beta}$ является аналогом тензора энергии-импульса материи, заполняющей пространства Эйнштейна.

Чтобы выяснить какие типы материи заполняют пространства Эйнштейна, Петров исследовал алгебраическую структуру тензора энергии-импульса. Как это делается: тензор $T_{\alpha\beta}$ сравнивают в какой-либо точке с метрическим тензором — в данной точке составляют разность $T_{\alpha\beta}-\xi g_{\alpha\beta}$ где ξ так называемые собственные значения матрицы $T_{\alpha\beta}$, приравнивают эту разность к нулю и выясняют, при каких ξ данное равенство имеет место. Иначе это называется

задачей об отыскании собственных значений матрицы*. Набор собственных значений матрицы позволяет судить об ее алгебраическом типе. Для знакоопределенной метрики эта задача решена давно. Петров разработал метод приведения матрицы к каноническому виду для индефинитной (знакопеременной) метрики, что позволило использовать его в псевдоримановом пространстве, в частности, для исследования алгебраической структуры тензора энергии-импульса. Наглядно это можно представить себе следующим образом. Собственные значения матрицы $T_{\alpha\beta}$ аналогичны базисным векторам матрицы метрического тензора, т.е. представляют собой как бы "скелет" $T_{\alpha\beta}$ (скелет материи), но, зная скелет, мы не знаем точно, как нарастить на него "мясо". Тем не менее по структуре этого скелета (длине и взаимному направлению векторов) можно судить об основных свойствах материи, например, таких, как однородность или изотропия, и их связи с кривизной пространства.

В результате Петров выяснил, что в пространствах Эйнштейна существуют 3 основных алгебраических типа тензора энергии-импульса и несколько их подтипов. Соответственно алгебраической классификации тензора энергии-импульса и тензора кривизны пространства, все пространства Эйнштейна делятся на три основных типа 1, 2, 3 (так называемая *петровская классификация*)†.

Пространства 1-го типа наиболее понятны, потому что в них поле тяготения создается массивным островом ("островное" распределение вещества), а само пространство может быть пустым или заполненным вакуумом. Кривизна такого пространства создается как островной массой, так и вакуумом. На бесконечном расстоянии от островной массы, в отсутствии вакуума, пространство становится плоским. Без островной массы, но заполненное вакуумом, пространство 1-го типа также обладает кривизной (например, пространство де Ситтера). Пустое пространство 1-го типа, т.е. без островов масс и не заполненное вакуумом, является плоским. Пространства 2-го и 3-го типов считаются более экзотическими, т.к. являются искривленными сами по себе. Их кривизна не связана с островным распределением масс или с наличием вакуума.

Пространства 2-го и 3-го типа обычно связывают с полями излучения, например, с гравитационными волнами. Спустя несколь-

---

*Вообще, задача определения собственных значений матрицы решается в точке, но полученный результат справедлив и для любой точки пространства.

†Хронометрически инвариантное представление алгебраической классификации пространств Эйнштейна (полей тяготения Петрова) была выполнена в 1970 году одним из авторов этой книги — Л. Б. Борисовой (Григорьевой) [32].

ко лет после Петрова, Э. Б. Глинер [33–35], исследуя алгебраическую структуру тензора энергии-импульса вакуумподобных состояний материи ($T_{\alpha\beta} \sim g_{\alpha\beta}$, $R_{\alpha\beta} = k g_{\alpha\beta}$), выделил особый его тип, для которого все 4 собственных числа одинаковы, т.е. 3 пространственных вектора и 1 временной вектор "орторепера" тензора $T_{\alpha\beta}$ равны между собой*. Материя, отвечающая тензору энергии-импульса с такой структурой, обладает постоянной плотностью $\mu = const$, равной значению совпадающих собственных чисел тензора энергии-импульса $\mu = \xi$ (размерность $\mu\, T_{\alpha\beta}$ [грамм/см^3]). Собственно тензор энергии-импульса в этом случае равен†

$$T_{\alpha\beta} = \mu\, g_{\alpha\beta}\,. \tag{5.9}$$

Уравнения поля при $\lambda = 0$ имеют вид

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\, g_{\alpha\beta} R = -\varkappa \mu\, g_{\alpha\beta}\,, \tag{5.10}$$

а когда космологический член $\lambda \neq 0$, то

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\, g_{\alpha\beta} R = -\varkappa \mu\, g_{\alpha\beta} + \lambda g_{\alpha\beta}\,. \tag{5.11}$$

Такое состояние материи Глинер назвал *μ-вакуум* [33–35], т.к. оно относится к вакуумподобным состояниям вещества ($T_{\alpha\beta} \sim g_{\alpha\beta}$, $R_{\alpha\beta} = k g_{\alpha\beta}$), но вакуумом не является (в вакууме $T_{\alpha\beta} = 0$). Тогда же Глинер показал, что пространства, заполненные μ-вакуумом, представляют собой пространства Эйнштейна, причем существуют три основных типа μ-вакуума, которые соответствуют трем основным типам тензора энергии-импульса (и тензора кривизны). Иначе говоря, пространство Эйнштейна каждого типа (1, 2, 3) при наличии в нем материи заполнено μ-вакуумом также определенного типа (1, 2, 3).

Фактически, поскольку для "орторепера" тензора энергии-импульса μ-вакуума все 3 пространственных вектора и 1 временной

---

*Если ввести локальное плоское пространство, касательное риманову пространстве в точке, то собственные значения ξ тензора $T_{\alpha\beta}$ — это значения в орторепере, поставленном в соответствие этому тензору, по сравнению с собственными значениями метрического тензора $g_{\alpha\beta}$ в орторепере, определяемом в данном касательном пространстве.

†В оригинальной работе Глинера сигнатура $(-+++)$, поэтому у него $T_{\alpha\beta} = -\mu g_{\alpha\beta}$ и, следовательно, т.к. наблюдаемая плотность материи положительна $\rho = \frac{T_{00}}{g_{00}} = -\mu > 0$, численное значение μ у Глинера получается отрицательным. У нас принята сигнатура $(+---)$, таким образом, в нашей книге $\mu > 0$ и $T_{\alpha\beta} = \mu g_{\alpha\beta}$.

вектор одинаковы (равноправны все 4 направления), μ-вакуум представляет собой максимальную степень изотропии материи. Кроме того, т.к. пространства Эйнштейна однородны на всем своем протяжении и плотность материи в них везде постоянна [30], заполняющий их μ-вакуум не только обладает постоянной плотностью, но и является однородным. Итак пространства Эйнштейна могут быть заполнены μ-вакуумом, обычным вакуумом ($T_{\alpha\beta} = 0$) или пустотой. Кроме того, в них могут существовать отдельные "острова" массы, также создающие кривизну. Поэтому пространства Эйнштейна 1-го типа наиболее полно соответствуют имеющимся сведениям о нашей Вселенной в целом. Таким образом, исследование геометрии нашей Вселенной и физических состояний заполняющей ее материи на сегодняшний день сводится к исследованию пространств Эйнштейна 1-го типа. В свое время Петров доказал следующую теорему (см. §13 в его книге [30]):

Теорема Петрова

Всякое пространство постоянной кривизны есть пространство Эйнштейна <...> Пространства Эйнштейна 2-го типа и 3-го типа не могут быть пространствами постоянной кривизны.

Следовательно, пространства постоянной кривизны относятся к типу 1 по петровской классификации (пространства Эйнштейна). Если $K = 0$, то пространство Эйнштейна 1-го типа является плоским. Это еще более упрощает задачу исследования вакуума и вакуумоподобных состояний материи в нашей Вселенной, т.к. на нынешний день мы имеем хорошо исследованные пространства постоянной кривизны. Это — *пространства де Ситтера* (или, иначе — пространства с метрикой де Ситтера).

В пространстве де Ситтера $T_{\alpha\beta} = 0$ и $\lambda \neq 0$, оно является сферически-симметричным, заполнено обычным вакуумом и не содержит "островов" вещества. Вместе с тем мы знаем, что средняя плотность материи в нашей Вселенной очень мала. Рассматривая ее в целом, можно абстрагироваться от присутствия редких "островов" вещества и неоднородностей, локально нарушающих сферическую симметрию. Поэтому наше пространство в целом можно считать пространством де Ситтера с радиусом, равным радиусу Вселенной.

Теоретически пространства де Ситтера могут обладать как положительной кривизной $K > 0$, так и отрицательной кривизной $K < 0$. Анализ показывает (Дж. Л. Синг [36]), что в мире де Ситтера с $K < 0$ времениподобные геодезические линии являются замкнуты-

ми: "...пробная частица снова и снова повторяет движение (свою историю) по той же самой траектории! Это <...> приводит к идеям, которые носят слишком уж "революционный" характер с точки зрения физики, в том виде, как она существует сегодня". Поэтому большинство физиков (Дж. Л. Синг, А. З. Петров, Э. Б. Глинер и др.) пространство де Ситтера с отрицательной кривизной не рассматривали.

Напомним, четырехмерные римановы пространства с положительной кривизной — это обобщение обычной сферы, а пространства отрицательной кривизны — обобщение пространства Лобачевского-Бойяи, сферы с мнимым радиусом. В интерпретации Пуанкаре пространства с отрицательной кривизной отображаются на внутреннюю поверхность сферы. Зельманов методами хронометрических инвариантов показал, что в псевдоримановом пространстве (метрика которого, как известно, знакопеременна) трехмерная физическая наблюдаемая кривизна по знаку противоположна четырехмерной кривизне. Судя по тому, что мы воспринимаем нашу планету как шар, наблюдаемая трехмерная кривизна нашего мира является положительной. Тогда гипотетические существа. живущие на "внутренней" поверхности Земли, воспринимают ее как вогнутую, они живут в мире с отрицательной наблюдаемой кривизной.

Такое сравнение привело многих ученых к предположению о возможности существования зеркального двойника нашего мира — *зеркальной Вселенной*, населенной антиподами.

Первоначально считалось: если наш мир имеет положительную кривизну, то зеркальная Вселенная — это пространство с отрицательной кривизной. Однако Синг в Главе 7 своей книги [36] показал, что в пространстве де Ситтера с положительной кривизной пространственноподобные геодезические траектории являются открытыми, тогда как в пространстве де Ситтера отрицательной кривизны они являются замкнутыми. Иначе говоря, пространство де Ситтера отрицательной кривизны не является зеркальной репликой пространства де Ситтера с положительной кривизной. Вместе с тем в наших предыдущих работах [19] (см. также §1.3 этой книги) мы обнаружили другой подход к концепции зеркальной Вселенной. При исследовании движения свободных частиц, ход времени которых противоположен ходу времени наблюдателя, оказалось, что наблюдаемой скалярной компонентой их четырехмерного вектора импульса является отрицательная релятивистская масса. Причем зеркальность частиц по массе была получена нами как формальный результат проецирования четырехмерного импульса на время

и не связана с изменением знака кривизны пространства: частицы с прямым и обратным ходом времени могут существовать как в пространстве положительной кривизны, так и в пространстве с отрицательной кривизной.

Эти выводы, полученные геометрическими методами Общей Теории Относительности, неизбежно влияют на представление о строении материи и космологии нашей Вселенной.

В §5.2 мы получим выражение для тензора энергии-импульса вакуума и, как следствие, выражение для его наблюдаемой плотности. Там же мы введем классификацию материи по виду тензора энергии-импульса (*T-классификация материи*). В §5.3 будут исследованы физические свойства вакуума в пространствах Эйнштейна 1-го типа, в частности, свойства вакуума в пространстве де Ситтера, и сделаны выводы о глобальной структуре нашей Вселенной. Развивая эту линию, в §5.4 мы сформулируем концепцию происхождения и развития Вселенной в результате *инверсионного взрыва* из первочастицы с конкретными характеристиками. В §5.5 будет получено выражение для неньютоновской гравитационно-инерциальной силы, пропорциональной расстоянию. Параграфы 5.6 и 5.7 посвящены исследованию состояния коллапса в пространстве с метрикой Шварцшильда (гравитационный коллапс, *черная дыра*) и в пространстве с метрикой де Ситтера (инфляционный коллапс, *инфлянтон*).

§5.2 Наблюдаемая плотность вакуума. T-классификация материи

Уравнения Эйнштейна (уравнения поля в теории тяготения Эйнштейна) — это некоторые функции, связывающие кривизну пространства с распределением материи. В общем случае они имеют вид $R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}\,g_{\alpha\beta}R=-\varkappa T_{\alpha\beta}+\lambda g_{\alpha\beta}$. Левая часть, как известно, характеризует геометрию пространства, правая характеризует материю. При этом знак второго члена в правой части зависит от знака λ. Как мы сейчас увидим, знак λ, т.е. характер сил неньютоновской гравитации (отталкивание или притяжение), прямо связан со знаком плотности вакуума.

Итак, пространства Эйнштейна определяются соотношением $T_{\alpha\beta}\sim g_{\alpha\beta}$, для них уравнения поля имеют вид $R_{\alpha\beta}=kg_{\alpha\beta}$. Такой вид уравнения поля могут иметь в двух случаях: 1) когда $T_{\alpha\beta}\neq 0$ (вещество); 2) когда $T_{\alpha\beta}=0$ (вакуум). Но, т.к. в пространствах Эйнштейна, заполненных вакуумом, тензор энергии-импульса вещества

равен нулю, он никак не может быть пропорциональным метрическому тензору, что противоречит определению пространства Эйнштейна ($T_{\alpha\beta} \sim g_{\alpha\beta}$). В чем тут дело? В отсутствие вещества (в вакууме) уравнения поля принимают вид $R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\, g_{\alpha\beta} R = \lambda g_{\alpha\beta}$, т.е. вклад в кривизну поля вносит не вещество, а λ-поле (неньютоновские поля тяготения). В отсутствие вещества и λ-полей $R_{\alpha\beta} = 0$, т.е. пространство является пустым, но, вообще говоря, не является плоским. Получается, что λ-поля и вакуум — это фактически одно и тоже, т.е. ***вакуум представляет собой неньютоновские поля тяготения*** (физическое определение вакуума). Соответственно, λ-силы являются проявлением собственного потенциала вакуума.

Это означает, что член $\lambda g_{\alpha\beta}$ из уравнений поля в вакууме выбрасывать нельзя, как бы мал он ни был, т.к. он характеризует вакуум, являющийся одной из причин искривления пространства. Тогда уравнения поля $R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\, g_{\alpha\beta} R = -\varkappa T_{\alpha\beta} + \lambda g_{\alpha\beta}$ можно записать в виде

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\, g_{\alpha\beta} R = -\varkappa \widetilde{T}_{\alpha\beta}\,, \tag{5.12}$$

где величина

$$\widetilde{T}_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} + \breve{T}_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} - \frac{\lambda}{\varkappa}\, g_{\alpha\beta} \tag{5.13}$$

представляет собой тензор энергии-импульса, характеризующий как вещество, так и вакуум. Его первый член — это обычный тензор энергии-импульса вещества. Второй член

$$\breve{T}_{\alpha\beta} = -\frac{\lambda}{\varkappa}\, g_{\alpha\beta} \tag{5.14}$$

является аналогом тензора энергии-импульса для вакуума.

Таким образом, т.к. пространства Эйнштейна могут быть заполнены вакуумом, их математическое определение лучше записывать в более общем виде, учитывающим наличие в пространстве не только вещества, но и вакуума (λ-полей): $\widetilde{T}_{\alpha\beta} \sim g_{\alpha\beta}$. Это, в частности, позволит избежать противоречий при рассмотрении пустых пространств Эйнштейна.

Заметим, полученное выражение для тензора энергии-импульса вакуума (5.14) является прямым следствием уравнений поля в общем виде.

Если $\lambda > 0$ (неньютоновские силы представляют собой силы отталкивания), то наблюдаемая плотность вакуума получается отрицательной

$$\breve{\rho} = \frac{\breve{T}_{00}}{g_{00}} = -\frac{\lambda}{\varkappa} = -\frac{|\lambda|}{\varkappa} < 0\,, \tag{5.15}$$

тогда как при $\lambda < 0$ (силы неньютоновской гравитации являются силами притяжения) наблюдаемая плотность вакуума, наоборот, положительна

$$\breve{\rho} = \frac{\breve{T}_{00}}{g_{00}} = -\frac{\lambda}{\varkappa} = \frac{|\lambda|}{\varkappa} > 0\,. \tag{5.16}$$

Последнее, как мы увидим в следующем параграфе, для нас имеет существенное значение, т.к. пространство де Ситтера с $\lambda < 0$, представляющее собой пространство постоянной отрицательной (четырехмерной) кривизны, заполненное только вакуумом (без вещества), наиболее полно соответствует наблюдательным данным о нашей Вселенной в целом.

Итак, основываясь на исследованиях Петрова и Глинера, а также учитывая наше замечание относительно наличия у вакуума (λ-полей) собственного тензора энергии-импульса (и, как следствие, физических свойств), мы можем предложить "геометрическую" классификацию состояний материи по тензору энергии-импульса (назовем это *Т-классификацией материи*:

I) пустота: $T_{\alpha\beta} = 0$, $\lambda = 0$ (пространство-время без материи), уравнения поля имеют вид $R_{\alpha\beta} = 0$;

II) вакуум: $T_{\alpha\beta} = 0$, $\lambda \neq 0$ (образован λ-полями), уравнения поля имеют вид $G_{\alpha\beta} = -\lambda\, g_{\alpha\beta}$;

III) μ-вакуум: $T_{\alpha\beta} = \mu\, g_{\alpha\beta}$, $\mu = const$ (вакуумоподобное состояние вещества), уравнения поля $G_{\alpha\beta} = -\varkappa\mu\, g_{\alpha\beta}$;

IV) вещество: $T_{\alpha\beta} \neq 0$, $T_{\alpha\beta} \not\sim g_{\alpha\beta}$ (это состояние включает как обычное вещество, так и электромагнитное поле).

В общем случае тензор энергии-импульса вещества (тип IV по Т-классификации) не пропорционален метрическому тензору. Вместе с тем есть и такие состояния вещества, при которых тензор энергии-импульса содержит член, пропорциональный метрическому тензору, но, т.к. там есть и другие члены, — это не μ-вакуум. Таковы, например, идеальная жидкость

$$T_{\alpha\beta} = \left(\rho - \frac{p}{c^2}\right) U_\alpha U_\beta - \frac{p}{c^2}\, g_{\alpha\beta} \tag{5.17}$$

и электромагнитное поле

$$T_{\alpha\beta} = F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} g_{\alpha\beta} - F_{\alpha\sigma}F_{\beta\cdot}^{\cdot\sigma}\,, \tag{5.18}$$

где $F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$ первый инвариант электромагнитного поля (3.27), $F_{\alpha\beta}$ тензор Максвелла, p давление жидкости. Если $p = \rho c^2$ (вещество

внутри атомных ядер) и $p = const$, тензор энергии-импульса идеальной жидкости, казалось бы, может стать пропорциональным метрическому тензору. Однако, как будет показано в следующем параграфе, уравнение состояния μ-вакуума имеет принципиально другой вид $p = -\rho c^2$ (состояние инфляции, при положительной плотности — расширение). Следовательно, давление и плотность в атомных ядрах должны быть непостоянными, чтобы препятствовать переходу внутриядерного вещества в вакуумподобное состояние.

Заметим, в данной Т-классификации, как и в уравнениях поля, идет речь только о *распределенной материи*, влияющей на кривизну пространства, а не о пробных частицах — материальных точках, собственные массы и размер которых настолько малы, что их воздействием на кривизну пространства можно пренебречь. Поэтому, в частности, для частиц понятие тензора энергии-импульса не определено, их следует рассматривать вне данной Т-классификации. Так, например, в нашей книге [19] предметом исследования являются 3 вида частиц, каждому из которых соответствует свой характерный тип пространственно-временных траекторий, однако сами частицы рассматриваются как "шарики" (или волны), бегущие по "бугристому" фону базового пространства и никак не влияющие на его геометрическую структуру.

§ 5.3 Физические свойства вакуума. Космология

Пространства Эйнштейна определяются уравнениями поля вида $R_{\alpha\beta} = k g_{\alpha\beta}$, где $k = const$. При $\lambda \neq 0$ и $T_{\alpha\beta} = \mu g_{\alpha\beta}$ пространство заполнено материей, тензор энергии-импульса которого пропорционален метрическому тензору, — т.е. μ-вакуумом. Для вакуума тензор энергии-импульса, как мы убедились в предыдущем параграфе, также пропорционален метрическому тензору. Это означает, что физические свойства вакуума и μ-вакуума в принципе одинаковы, разница лишь в скалярном коэффициенте, определяющем состав материи (λ-поля или вещество) и абсолютной величине действующих сил. Поэтому мы будем рассматривать пространство Эйнштейна, заполненное вакуумом и μ-вакуумом. В этом случае уравнения поля принимают вид

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\, g_{\alpha\beta} R = -\left(\varkappa\mu - \lambda\right) g_{\alpha\beta}\,. \tag{5.19}$$

Записывая их в смешанном виде и затем свертывая, находим скалярную кривизну

$$R = 4\left(\varkappa\mu - \lambda\right), \tag{5.20}$$

подставляя которую в исходные уравнения (5.19), получаем уравнения поля в окончательном виде

$$R_{\alpha\beta} = (\varkappa\mu - \lambda)\, g_{\alpha\beta}\,, \tag{5.21}$$

где $\varkappa\mu - \lambda = const = k$.

Теперь исследуем физические свойства вакуума и μ-вакуума. Вычислим хронометрически инвариантные компоненты тензора энергии-импульса: наблюдаемую плотность материи $\rho = \frac{T_{00}}{g_{00}}$, вектор наблюдаемой плотности импульса $J^i = \frac{c\,T_0^i}{\sqrt{g_{00}}}$, наблюдаемый тензор напряжений $U^{ik} = c^2 T^{ik}$.

Для μ-вакуума ($T_{\alpha\beta} = \mu\, g_{\alpha\beta}$) физические наблюдаемые компоненты тензора энергии-импульса имеют вид

$$\rho = \frac{T_{00}}{g_{00}} = \mu\,, \tag{5.22}$$

$$J^i = \frac{c\,T_0^i}{\sqrt{g_{00}}} = 0\,, \tag{5.23}$$

$$U^{ik} = c^2 T^{ik} = -\,\mu c^2 h^{ik} = -\rho c^2 h^{ik}. \tag{5.24}$$

Для тензора энергии-импульса $\breve{T}_{\alpha\beta} = -\frac{\lambda}{\varkappa}\, g_{\alpha\beta}$ (5.14), характеризующего вакуум, физические наблюдаемые величины имеют следующий вид

$$\breve{\rho} = \frac{\breve{T}_{00}}{g_{00}} = -\frac{\lambda}{\varkappa}\,, \tag{5.25}$$

$$\breve{J}^i = \frac{c\,\breve{T}_0^i}{\sqrt{g_{00}}} = 0\,, \tag{5.26}$$

$$\breve{U}^{ik} = c^2 \breve{T}^{ik} = \frac{\lambda}{\varkappa}\, c^2 h^{ik} = -\,\breve{\rho} c^2 h^{ik}. \tag{5.27}$$

Отсюда видно: вакуум (λ-поля) и μ-вакуум обладают постоянной плотностью (т.е. представляют собой *однородно распределенную материю*), а также являются *неизлучающими средами* (т.к. в них поток энергии $c^2 J^i$ равен нулю)

$$c^2 \breve{J}^i = \frac{c^3 \breve{T}_0^i}{\sqrt{g_{00}}} = 0\,, \qquad c^2 J^i = \frac{c^3 T_0^i}{\sqrt{g_{00}}} = 0\,. \tag{5.28}$$

В системе координат, сопутствующей среде, тензор напряжений выглядит следующим образом [11–13]

$$U_{ik} = p_0 h_{ik} - \alpha_{ik} = p h_{ik} - \beta_{ik}\,, \tag{5.29}$$

где p_0 равновесное давление, определяемое из уравнения состояния, p истинное давление, α_{ik} ***вязкость 2-го рода*** (тензор вязких напряжений), и $\beta_{ik}=\alpha_{ik}-\frac{1}{3}\,\alpha h_{ik}$ его анизотропная часть (***вязкость 1-го рода***, проявляющаяся при анизотропной деформации), где $\alpha=\alpha_i^i$ след тензора вязкости 2-го рода α_{ik}.

Записывая тензор напряжений μ-вакуума (5.24) в системе отсчета, сопутствующей самому μ-вакууму, получаем

$$U_{ik}=ph_{ik}=-\rho c^2 h_{ik}\,, \tag{5.30}$$

аналогично для тензора напряжений вакуума (5.27)

$$\breve{U}_{ik}=\breve{p}h_{ik}=-\breve{\rho}c^2 h_{ik}\,. \tag{5.31}$$

Отсюда следует, что вакуум и μ-вакуум являются невязкими средами ($\alpha_{ik}=0$, $\beta_{ik}=0$) уравнения которых*

$$\breve{p}=-\breve{\rho}c^2, \qquad p=-\rho c^2. \tag{5.32}$$

Такое состояние материи называют ***инфляцией*** (***инфляция*** — раздувание), т.к. при положительной плотности материи давление получается отрицательным, среда расширяется.

Таковы основные физические свойства вакуума и μ-вакуума: однородных ($\rho=const$), невязких ($\alpha_{ik}=\beta_{ik}=0$) и неизлучающих ($J^i=0$) сред, находящихся в состоянии инфляции.

Теперь от общих физических свойств перейдем к исследованию вакуума, заполняющего пространства постоянной кривизны, в частности, пространство де Ситтера, наиболее полно соответствующее пространству нашей Вселенной в целом. В пространствах постоянной кривизны тензор Римана-Кристоффеля имеет вид (см. Главу 7 в книге Синга [36])

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}=K\left(g_{\alpha\gamma}\,g_{\beta\delta}-g_{\alpha\delta}\,g_{\beta\gamma}\right), \qquad K=const. \tag{5.33}$$

Свертывая его по двум индексам, получаем выражение для тензора Риччи, последующее свертывание которого позволяет нам вычислить скалярную кривизну. В результате имеем

$$R_{\alpha\beta}=-3Kg_{\alpha\beta}\,, \qquad R=-12K\,. \tag{5.34}$$

---

*Уравнение состояния распределенной материи — это зависимость ее давления от плотности. Например, $p=0$ уравнение состояния пылевой среды, $p=\rho c^2$ уравнение состояния материи в атомных ядрах, $p=\frac{1}{3}\rho c^2$ уравнение состояния ультрарелятивистского газа.

Представляя пространство нашей Вселенной как пространство постоянной кривизны, получаем уравнения поля, выраженные через кривизну

$$3K g_{\alpha\beta} = -\varkappa T_{\alpha\beta} + \lambda g_{\alpha\beta}\,. \tag{5.35}$$

Запишем их, как и Синг, в виде $(\lambda - 3K)\, g_{\alpha\beta} = \varkappa T_{\alpha\beta}$. Тогда тензор энергии-импульса вещества в пространствах постоянной кривизны имеет вид

$$T_{\alpha\beta} = \frac{\lambda - 3K}{\varkappa}\, g_{\alpha\beta}\,. \tag{5.36}$$

Отсюда, в частности, видно, что в пространстве постоянной кривизны сама собой решается проблема геометризации материи: тензор энергии-импульса (5.36) выражается только через метрический тензор и константы. Пространство де Ситтера — это пространство постоянной кривизны, в котором $T_{\alpha\beta} = 0$ и $\lambda \neq 0$, т.е. оно заполнено только вакуумом (вещество в нем отсутствует). Тогда, приравнивая тензор энергии-импульса вещества (5.36) к нулю, получаем, как и Синг: в пространстве де Ситтера $\lambda = 3K$.

С учетом этого соотношения, выражение для наблюдаемой плотности вакуума в мире де Ситтера принимает вид

$$\breve{\rho} = -\frac{\lambda}{\varkappa} = -\frac{3K}{\varkappa} = -\frac{3Kc^2}{8\pi G}\,. \tag{5.37}$$

Теперь мы подходим к ключевому вопросу: каков знак четырехмерной кривизны пространства нашей Вселенной? Вопрос, увы, не праздный. От ответа на него зависит фактически, сойдется ли построенная космология мира де Ситтера с наблюдательными данными или получится результат, прямо противоположный общеизвестным астрономическим фактам.

Действительно, при положительной четырехмерной кривизне $K > 0$ плотность вакуума получается отрицательной, следовательно инфляционное давление больше нуля — вакуум сжимается. Тогда, т.к. $\lambda > 0$, неньютоновские силы гравитации являются силами отталкивания. Получается противоборство двух начал: инфляционного положительного давления вакуума, стремящегося сжать пространство, и сил неньютоновской гравитации, являющихся силами отталкивания. При этом, во-первых, т.к. λ-силы пропорциональны расстоянию, их расширяющее действие усиливалось бы с увеличением радиуса Вселенной: расширение Вселенной происходило бы с ускорением. И, во-вторых, если бы Вселенная когда-то была размером меньше расстояния, на котором сжимающее давление вакуума равно растягивающему действию λ-сил, ее расширение стало бы не-

возможным.

Если четырехмерная кривизна отрицательна $K<0$, плотность вакуума получается положительной, его инфляционное давление меньше нуля — вакуум расширяется. Кроме того, т.к. в этом случае $\lambda<0$, неньютоновские силы гравитации являются силами притяжения. Тогда Вселенная может расширяться практически из точки до тех пор, пока плотность вакуума не уменьшится до такой степени. что его расширяющее давление станет равным неньютоновским λ-силам притяжения.

Таким образом, вопрос знака кривизны является решающим для космологии нашей Вселенной.

Однако человеческое восприятие трехмерно, поэтому обычный наблюдатель не в состоянии что-либо узнать о знаке четырехмерной кривизны путем прямых измерений. Как быть в таком случае? Выход из создавшейся ситуации дает теория хронометрических инвариантов — метод для определения физических наблюдаемых величин.

Одной из своих задач Зельманов считал построение тензора кривизны трехмерного, вообще говоря, неголономного пространства, который обладал бы свойствами тензора кривизны Римана-Кристоффеля и, одновременно, обладал бы свойством хронометрической инвариантности. Он решил построить такой тензор по аналогии с тензором Римана-Кристоффеля, который получается как результат некоммутативности вторых производных от произвольного вектора в рассматриваемом пространстве. Вычисляя разность вторых хронометрических инвариантных производных от произвольного трехмерного вектора, он получил выражение

$$^*\nabla_i\,^*\nabla_k\,Q_l-\,^*\nabla_k\,^*\nabla_i\,Q_l=\frac{2A_{ik}}{c^2}\frac{^*\partial Q_l}{\partial t}+H_{lki\cdot}^{\cdot\cdot\cdot j}\,Q_j\,, \tag{5.38}$$

которое содержит хронометрически инвариантный тензор

$$H_{lki\cdot}^{\cdot\cdot\cdot j}=\frac{^*\partial\Delta_{il}^j}{\partial x^k}-\frac{^*\partial\Delta_{kl}^j}{\partial x^i}+\Delta_{il}^m\Delta_{km}^j-\Delta_{kl}^m\Delta_{im}^j\,, \tag{5.39}$$

аналогичный тензору Схоутена из теории неголономных многообразий*. Однако, в общем случае, когда имеет место вращение про-

*И. А. Схоутен построил теорию неголономных многообразий для произвольного числа измерений, рассматривая подпространство с размерностью m в пространстве размерности n, где $m<n$ [37]. Применительно к теории хронометрических инвариантов фактически рассматривается подпространство размерности $(m=3)$ в пространстве с размерностью $(n=4)$.

странства ($A_{ik} \neq 0$), тензор $H_{lki\cdot}^{\cdot\cdot\cdot j}$ отличается по своим алгебраическим свойствам от тензора Римана-Кристоффеля. Поэтому Зельманов ввел тензор

$$C_{lkij} = \frac{1}{4}\left(H_{lkij} - H_{jkil} + H_{klji} - H_{iljk}\right), \qquad (5.40)$$

не только являющийся хронометрически инвариантным, но еще и обладающий всеми алгебраическими свойствами тензора Римана-Кристоффеля. Таким образом, тензор C_{lkij} является тензором кривизны трехмерного пространства отсчета наблюдателя, сопутствующего своему телу отсчета. Свертывая его, получаем хронометрически инвариантные величины

$$C_{kj} = C_{kij\cdot}^{\cdot\cdot\cdot i} = h^{im} C_{kimj}\,, \qquad C = C_j^j = h^{lj} C_{lj}\,, \qquad (5.41)$$

которые также характеризуют кривизну трехмерного пространства. Так как C_{lkij}, C_{kj}, и C обладают свойством хронометрической инвариантности, они являются физическими наблюдаемыми величинами.

В частности, C представляет собой *трехмерную наблюдаемую кривизну* [11–13].

Применительно к нашему исследованию свойств вакуума и космологии, нас интересует, как трехмерная наблюдаемая кривизна C связана с четырехмерной кривизной K вообще и в пространстве де Ситтера, в частности. Рассмотрим эту задачу последовательно. Четырехмерный тензор кривизны Римана-Кристоффеля является тензором 4-го ранга, поэтому он имеет $n^4 = 256$ компонент, из которых существенными являются лишь 20. Остальные компоненты либо равны нулю, либо выражаются друг через друга, т.к. тензор Римана-Кристоффеля является:

1) симметричным по каждой паре индексов $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\alpha\beta}$;
2) антисимметричным относительно перестановок внутри каждой пары индексов $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta}$, $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma}$;
3) его компоненты связаны соотношением $R_{\alpha(\beta\gamma\delta)} = 0$, где круглые скобки обозначают перестановки по индексам (β, γ, δ).

Существенные компоненты тензора Римана-Кристоффеля образуют три хронометрически инвариантных (физических наблюдаемых) тензора

$$X^{ik} = -c^2\,\frac{R_{0\cdot 0\cdot}^{\cdot i\cdot k}}{g_{00}}\,, \quad Y^{ijk} = -c\,\frac{R_{0\cdots}^{\cdot ijk}}{\sqrt{g_{00}}}\,, \quad Z^{ijkl} = c^2 R^{ijkl}. \qquad (5.42)$$

Тензор X^{ik} имеет 6 компонент, тензор Y^{ijk} имеет 9 компонент, а у тензора Z^{ijkl} (в силу его симметрии) 6 компонент. Компоненты второго тензора связаны соотношением $Y_{(ijk)} = Y_{ijk} + Y_{jki} + Y_{kij} = 0$. Выражая эти три величины через хронометрически инвариантные характеристики пространства отсчета и затем опуская индексы, получаем

$$X_{ij} = \frac{^*\partial D_{ij}}{\partial t} - \left(D_i^l + A_{i\cdot}^{\cdot l}\right)(D_{jl} + A_{jl}) + \frac{1}{2}\left(^*\nabla_i F_j + {}^*\nabla_j F_i\right) - \frac{1}{c^2} F_i F_j \,, \tag{5.43}$$

$$Y_{ijk} = {}^*\nabla_i \left(D_{jk} + A_{jk}\right) - {}^*\nabla_j \left(D_{ik} + A_{ik}\right) + \frac{2}{c^2} A_{ij} F_k \,, \tag{5.44}$$

$$Z_{iklj} = D_{ik} D_{lj} - D_{il} D_{kj} + A_{ik} A_{lj} - A_{il} A_{kj} + 2 A_{ij} A_{kl} - c^2 C_{iklj} \,. \tag{5.45}$$

Отсюда видно, что пространственные наблюдаемые компоненты тензора Римана-Кристоффеля (5.45) непосредственно связаны с хронометрически инвариантным тензором трехмерной наблюдаемой кривизны C_{iklj}.

Теперь найдем выражение для трехмерной наблюдаемой кривизны в пространстве, кривизна которого постоянна. В этом случае тензор Римана-Кристоффеля имеет вид (5.33), тогда

$$R_{0i0k} = -K h_{ik} g_{00} \,, \tag{5.46}$$

$$R_{0ijk} = \frac{K}{c} \sqrt{g_{00}} \left(v_j h_{ik} - v_k h_{ij}\right) , \tag{5.47}$$

$$\begin{aligned} R_{ijkl} = K \Big[h_{ik} h_{jl} - h_{il} h_{kj} + \frac{1}{c^2} v_i \left(v_l h_{kj} - v_k h_{jl}\right) + \\ + \frac{1}{c^2} v_j \left(v_k h_{il} - v_l h_{ik}\right) \Big] , \end{aligned} \tag{5.48}$$

Вычисляя его хронометрически инвариантные (физические наблюдаемые) компоненты (5.42), получаем

$$X^{ik} = c^2 K h^{ik}, \quad Y^{ijk} = 0 \,, \quad Z^{ijkl} = c^2 K \left(h^{ik} h^{jl} - h^{il} h^{jk}\right) . \tag{5.49}$$

Соответственно, выражение для пространственных наблюдаемых компонент с нижними индексами будет иметь вид

$$Z_{ijkl} = c^2 K \left(h_{ik} h_{jl} - h_{il} h_{jk}\right) . \tag{5.50}$$

Последовательно свертывая эту величину, получаем

$$Z_{jl} = Z_{\cdot ji l}^{i \cdots} = 2 c^2 K h_{jl} \,, \qquad Z = Z_j^j = 6 c^2 K \,. \tag{5.51}$$

С другой стороны, нам известно выражение для Z_{ijkl} в пространстве произвольно кривизны (5.45), содержащее тензор трехмерной наблюдаемой кривизны в явном виде. Очевидно, что оно справедливо и для случая $K = const$. Тогда, последовательно свертывая общее выражение (5.45), имеем

$$Z_{il} = D_{ik}D_{l}^{k} - D_{il}D + A_{ik}A_{l\cdot}^{\cdot k} + 2A_{ik}A_{\cdot l}^{k\cdot} - c^2 C_{il}\,, \tag{5.52}$$

$$Z = h^{il}Z_{il} = D_{ik}D^{ik} - D^2 - A_{ik}A^{ik} - c^2 C\,. \tag{5.53}$$

В пространстве постоянной кривизны $Z = 6c^2 K$ (5.51), следовательно, связь между четырехмерной кривизной пространства K и трехмерной наблюдаемой кривизной C имеет вид

$$6c^2 K = D_{ik}D^{ik} - D^2 - A_{ik}A^{ik} - c^2 C\,. \tag{5.54}$$

Отсюда видно, что в отсутствии вращения и деформации пространства четырехмерная кривизна по знаку противоположна трехмерной наблюдаемой кривизне. В пространстве де Ситтера, где отсутствуют вращение и деформация,

$$K = -\frac{1}{6}\,C\,, \tag{5.55}$$

т.е. трехмерная наблюдаемая кривизна $C = -6K$.

Теперь мы можем определить модель развития нашей Вселенной, опираясь на два источника опытных фактов: 1) знак наблюдаемой плотности материи; 2) знак наблюдаемой трехмерной кривизны.

Во-первых, повседневный опыт свидетельствует: плотность материи в нашей Вселенной положительна, и, какой бы разреженной материя ни становилась, ее плотность все равно остается больше нуля. Тогда, чтобы плотность вакуума (5.37) была положительной, космологический член должен иметь отрицательный знак (силы неньютоновской гравитации являются силами притяжения) и, соответственно, четырехмерная кривизна должна быть отрицательной $K < 0$.

Во-вторых, судя по тому, что мы воспринимаем планеты и звезды как шары, создаваемая их массами наблюдаемая трехмерная кривизна положительна $C > 0$, т.е. $K < 0$ и $\lambda < 0$ (в случае отрицательной наблюдаемой кривизны мы воспринимали бы горизонт, в том числе и горизонт событий, вогнутым). Кроме того, как пишет Иваненко во вступительной статье к книге Вебера [29],

"Хотя данные космологических наблюдений, естественно, не точны, но, например, Мак-Витти* утверждает, что наилучшие результаты наблюдений хаббловского красного смещения $H \approx 75$ км/сек мегапарсек и средней плотности материи $\rho \approx 10^{-31}$ грамм/см^3 говорят в пользу неисчезающего космологического члена с $\lambda < 0$".

В итоге можно считать, что плотность вакуума в нашей Вселенной положительна, и трехмерная кривизна $C > 0$. Следовательно, четырехмерная кривизна $K < 0$ и, соответственно, космологический член $\lambda < 0$. Тогда из (5.37) получаем наблюдаемую плотность вакуума в нашей Вселенной, выраженную через наблюдаемую трехмерную кривизну

$$\breve{\rho} = -\frac{\lambda}{\varkappa} = -\frac{3K}{\varkappa} = \frac{C}{2\varkappa} > 0\,, \qquad (5.56)$$

т.е. инфляционное давление вакуума $\breve{p} = -\breve{\rho}c^2$ является отрицательным (вакуум расширяется). При этом, поскольку одним из физических свойств вакуума является его однородное распределение в пространстве, отрицательное инфляционное давление означает также расширение Вселенной в целом.

Таким образом, наблюдаемое трехмерное пространство нашей Вселенной ($C > 0$) представляется нам в виде трехмерной раздувающейся сферы, являющейся подпространством четырехмерного пространства-времени ($K < 0$ — пространства с геометрией, являющейся обобщением геометрии Лобачевского-Бойяи.

Иначе говоря, наблюдаемая геометрия трехмерного пространства в целом является обобщением геометрии Римана, а геометрия четырехмерного пространства-времени представляет собой обобщение геометрии Лобачевского-Бойяи.

Конечно, рассмотренное нами пространство де Ситтера — лишь какое-то приближение пространства нашей Вселенной: хотя "острова" тяготеющих масс чрезвычайно редки и не влияют на глобальную кривизну, в своих ближайших окрестностях их влияние на кривизну пространства существенно (отклонение лучей света в поле тяготения Солнца и другие эффекты). Однако при исследовании Вселенной в целом, редкими "островами" вещества и локальными неоднородностями кривизны можно пренебречь. В таком случае пространство де Ситтера с отрицательной четырехмерной кривизной (наблюдаемая трехмерная кривизна положительна) можно считать фоновым пространством нашей Вселенной.

---

*См. [38] в нашем списке литературы.

§ 5.4 Концепция инверсионного взрыва Вселенной

Из предыдущего параграфа мы знаем: в пространстве де Ситтера $\lambda = 3K$, т.е. λ-член по своему физическому смыслу — то же самое, что и кривизна. Для трехмерного сферического подпространства наблюдаемая кривизна $C = -6K$ равна

$$C = \frac{1}{R^2}\,, \tag{5.57}$$

где R наблюдаемый радиус кривизны (радиус сферы). Тогда четырехмерная кривизна пространства-времени

$$K = -\frac{1}{6R^2}\,, \tag{5.58}$$

т.е. чем больше радиус сферы, тем меньше кривизна K. По оценкам астрономов, наша Вселенная возникла $10 \div 20$ миллиардов лет назад. Следовательно, расстояние пройденное фотоном (квантом света), родившимся в начале жизни Вселенной, на нынешний день равно $R_H \approx 10^{27} \div 10^{28}$ см. Это расстояние называется *радиусом горизонта событий*. Полагая нашу Вселенную в целом миром де Ситтера с $K < 0$ для четырехмерной кривизны и, соответственно, для λ-члена $\lambda = 3K$, получаем оценку

$$K = -\frac{1}{6R_H^2} \approx -10^{-56}\ \text{cm}^{-2}. \tag{5.59}$$

Вместе с тем, схожие значения горизонта событий, кривизны и λ-члена можно получить из работ Роберто ди Бартини [39, 40], исследовавшего соотношения между физическими константами с точки зрения топологии. В его работах *космический радиус* Вселенной интерпретируется как *наибольшая протяженность*, определяемая из топологических соображений. Согласно *инверсионному соотношению ди Бартини*

$$\frac{R\,\rho}{r^2} = 1\,, \tag{5.60}$$

космический радиус R (наибольшая протяженность пространства) является инверсионным образом гравитационного радиуса электрона $\rho = 1.347\times 10^{-55}$ см (наименьшая протяженность) относительно радиуса сферической инверсии $r = 2.818\times 10^{-13}$ см, равного классическому радиусу электрона (по ди Бартини — радиус сферической инверсии). Численно космический радиус (предельно большой радиус горизонта событий) составляет [39, 40]

$$R = 5.895\times 10^{29}\,\text{см}\,. \tag{5.61}$$

Космическая масса (масса под космическим радиусом) и *космическая плотность*, также определяемые из топологических соображений [39, 40], составляют

$$M = 3.986 \times 10^{57}\,\text{грамм}\,, \qquad \rho = 9.87 \times 10^{-34}\,\text{грамм/см}^3. \qquad (5.62)$$

Фактически, из работ ди Бартини следует, что пространство Вселенной (от классического радиуса электрона до горизонта событий) является внешним инверсионным образом внутреннего пространства некоей частицы размером с электрон (ее радиус лежит в пределах от классического радиуса электрона до его гравитационного радиуса). В остальном эта частица отличается от электрона: ее масса равна космической массе $M = 3.986 \times 10^{57}$ грамм, тогда как масса электрона $m = 9.11 \times 10^{-28}$ грамм.

Пространство внутри этой частицы непредставимо пространством де Ситтера. Действительно, если определить плотность вакуума в пространстве де Ситтера с $K < 0$ и наблюдаемым радиусом кривизны $r = 2.818 \times 10^{-13}$ см, мы получим

$$\breve{\rho} = -\frac{3K}{\varkappa} = -\frac{1}{2\varkappa}\, r^2 = 3.39 \times 10^{51}\,\text{грамм/см}^3, \qquad (5.63)$$

тогда как плотность внутри частицы ди Бартини составляет

$$\rho = \frac{M}{2\pi^2 r^3} = 9.03 \times 10^{93}\,\text{грамм/см}^3. \qquad (5.64)$$

Вместе с тем внешнее пространство, являющееся инверсионным образом внутреннего, по характеристикам подходит под пространство де Ситтера. Представим, что пространство с радиусом кривизны, равным космическому радиусу ди Бартини $R = 5.895 \times 10^{29}$ см, является пространством де Ситтера с $K < 0$. В этом случае четырехмерная кривизна и λ-член равны

$$K = -\frac{1}{6R^2} = -4.8 \times 10^{-61}\,\text{см}^{-2}, \qquad (5.65)$$

$$\lambda = 3K = -\frac{1}{2R^2} = -14.4 \times 10^{-61}\,\text{см}^{-2}, \qquad (5.66)$$

т.е. на пять порядков меньше наблюдаемой оценки $|\lambda| < 10^{-56}$. Это можно объяснить тем, что, т.к. Вселенная продолжает расширяться, в будущем абсолютные значения ее кривизны и космологического члена уменьшатся, приближаясь к значениям (5.65, 5.66), вычисленным для наибольшей протяженности (космического радиуса). Расчетная плотность вакуума в пространстве де Ситтера под

космическим радиусом

$$\breve{\rho} = -\frac{3K}{\varkappa} = -\frac{3Kc^2}{8\pi G} \approx 7.7\times10^{-34}\,\text{грамм/см}^3 \qquad (5.67)$$

также меньше наблюдаемой средней плотности материи во Вселенной ($5\div10\times10^{-30}$ грамм/см^3) и фактически почти совпадают с плотностью материи под космическим радиусом по ди Бартини 9.87×10^{-34} грамм/см^3 (5.62).

Выяснить, сколько еще наша Вселенная будет расширяться, можно, определив, насколько наблюдаемый радиус горизонта событий R_H еще не достиг радиуса кривизны R. Полагая предельный радиус горизонта событий Вселенной $R_{H(\max)}$ равным космическому радиусу (внешней инверсионной протяженности) по ди Бартини $R = R_{H(\max)} = 5.895\times10^{29}$ см (5.61), и, сравнивая его с оценкой наблюдаемого радиуса горизонта событий ($R_H \approx 10^{27}\div10^{28}$ см), получаем $\Delta R = R_{H(\max)} - R_H \approx 5.8\times10^{29}$ см, т.е. нашей Вселенной осталось расширяться

$$t = \frac{\Delta R}{c} \approx 600 \text{ миллиардов лет.} \qquad (5.68)$$

Эти расчеты плотности вакуума и других характеристик пространства де Ситтера позволяют сделать выводы о происхождении и эволюции нашей вселенной и допускают единственную интерпретацию инверсионного соотношения ди Бартини. Назовем ее *космологической концепцией Инверсионного Взрыва.* Напомним, наши расчеты характеристик пространства де Ситтера основаны только на геометрических методах Общей Теории Относительности, а инверсионное соотношение ди Бартини (5.60) является очевидным следствием современных знаний о физических константах. Итак...

> ...Вначале существовала единственная прачастица с радиусом, равным классическому радиусу электрона, и массой, равной массе всей Вселенной.
>
> Затем произошел инверсионный взрыв: в результате топологического перехода материя внутреннего пространства прачастицы инверсировалась относительно ее поверхности во внешний мир, образую нашу расширяющуюся Вселенную. На нынешний день, спустя 10÷20 млрд. лет после инверсионного взрыва, Вселенная находится в ранней стадии эволюции. Ее расширение продлится еще почти 600 млрд. лет.
>
> Спустя этот срок расширяющееся пространство достигнет своего радиуса кривизны, на котором неньютоновские силы

Стадии эволюции	Возраст, млрд. лет	Радиус, см	Плотность, грамм/см^3	λ-член, см$^{-2}$
Прачастица (до взрыва)	0	2.82×10^{-13}	9.03×10^{93}	?
В наши дни	$10\div20\times10^{9}$	$10^{27}\div10^{28}$	$5\div10\times10^{-30}$	$<10^{-56}$
После расширения	623×10^{9}	5.89×10^{29}	9.87×10^{-34}	1.44×10^{-60}

Таблица 5.1: Параметры материи и пространства на разных стадиях эволюции Вселенной, согласно космологической концепции Инверсионного Взрыва.

> гравитации, пропорциональные расстоянию, уравновесят инфляционное расширяющее давление вакуума. Расширение Вселенной прекратится, наступит устойчивое состояние, которое продлится вплоть до следующего инверсионного топологического перехода...

Параметры материи и пространства на разных стадиях эволюции Вселенной приведены в Таблице 3.

Причины топологического перехода, приведшего к сферической инверсии материи из прачастицы (инверсионному взрыву прачастицы), неизвестны... впрочем, как и причины "начала" Вселенной в других современных космологических концепциях, например в концепции Большого Взрыва из сингулярной точки.

§5.5 Неньютоновские гравитационные силы

Пространства Эйнштейна 1-го типа, в том числе и пространства постоянной кривизны, помимо включений в виде "островов" вещества, могут быть как пустыми, так и заполненными однородной материей. Однако существует принципиальное различие между пустым пространством Эйнштейна 1-го типа (кривизна $K=0$) и непустым ($K=const\neq0$).

Чтобы наши рассуждения были более конкретными, обратимся к наиболее характерным примерам пустого и непустого пространства Эйнштейна 1-го типа.

Если остров массы представляет собой шар (сферически-симметричное распределение массы в острове), помещенный в пустоту, то кривизну такого пространства создает ньютоновское поле тяготения острова, и оно не является пространством постоянной

кривизны. При удалении от острова на бесконечность пространство становится плоским, т.е. пространством постоянной кривизны с $K=0$. Характерным примером поля тяготения, создаваемого сферически-симметричным островом массы в пустоте, является поле, описываемое метрикой Шварцшильда

$$ds^2 = \left(1-\frac{r_g}{r}\right)c^2dt^2 - \frac{dr^2}{1-\frac{r_g}{r}} - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right), \tag{5.69}$$

где r расстояние от острова, r_g его гравитационный радиус.

В пространстве с метрикой Шварцшильда нет вращения и деформации. Компоненты вектора гравитационно-инерциальной силы (1.38) вычисляются следующим образом. Судя по метрике (56.69), величина g_{00} имеет вид

$$g_{00} = 1 - \frac{r_g}{r}\,, \tag{5.70}$$

тогда производная от потенциала $\mathrm{w}=c^2(1-\sqrt{g_{00}})\;x^i$, равна

$$\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^i} = -\frac{c^2}{2\sqrt{g_{00}}}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}\,. \tag{5.71}$$

Подставляя эту производную в выражение для гравитационно-инерциальной силы (1.38), в отсутствие вращения имеем

$$F_1 = -\frac{c^2 r_g}{2r^2}\frac{1}{1-\frac{r_g}{r}}\,, \qquad F^1 = -\frac{c^2 r_g}{2r^2}\,, \tag{5.72}$$

таким образом, вектор F^i в пространстве с метрикой Шварцшильда характеризует ньютоновскую гравитационную силу, которая обратно пропорциональна квадрату расстояния r от тяготеющей массы (источника поля).

Если пространство *заполнено* сферически симметричным распределением вакуума и не включает островов массы, его кривизна будет везде одинаковой. Пример такого поля тяготения — поле, описываемое метрикой де Ситтера*

$$ds^2 = \left(1-\frac{\lambda r^2}{3}\right)c^2dt^2 - \frac{dr^2}{1-\frac{\lambda r^2}{3}} - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right). \tag{5.73}$$

---

*Согласно последним исследованиям [41], метрика де Ситтера (5.73) отвечает условию сферической симметрии только в предельном случае, когда $\lambda=0$, тогда как в общем случае ($\lambda\neq 0$) пространство де Ситтера является сферически симметричным только если оно имеет нулевой объем (т.е. вырождается в точку) или при других частных условиях.

Заметим, что хотя в пространстве де Ситтера нет островов вещества, создающих обычные ньютоновские поля тяготения, мы можем рассматривать движение малых (пробных) частиц, собственные ньютоновские поля которых настолько малы, что ими можно пренебречь.

Пространство с метрикой де Ситтера представляет собой пространство постоянной кривизны, превращающееся в плоское пространство только в отсутствие λ-полей. Вращение и деформация в нем также отсутствуют, а компоненты вектора гравитационно-инерциальной силы имеют вид

$$F_1 = \frac{\lambda c^2}{3}\frac{r}{1-\frac{\lambda r^2}{3}}\,, \qquad F^1 = \frac{\lambda c^2}{3}\,r\,, \tag{5.74}$$

т.е. вектор F^i в пространстве де Ситтера характеризует неньютоновские гравитационные силы, пропорциональные, r: если $\lambda<0$, это будут силы притяжения, если $\lambda>0$, то силы отталкивания. Таким образом, силы неньютоновской гравитации (λ-силы) тем сильнее, чем больше расстояние, на котором они действуют.

Таким образом, мы видим принципиальное различие между пустым и непустым пространствами Эйнштейна 1-го типа: в пустом с островом массы действуют только ньютоновские силы, в заполненном вакуумом без островов массы — только силы неньютоновской гравитации.

Примером "смешанного" пространства 1-го типа является пространство с метрикой Коттлера [42]

$$\left.\begin{aligned} ds^2 &= \left(1+\frac{ar^2}{3}+\frac{b}{r}\right)c^2dt^2-\frac{dr^2}{1+\frac{ar^2}{3}+\frac{b}{r}}-r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2\right)\\ F_1 &= -\,c^2\,\frac{\frac{ar}{3}-\frac{b}{2r^2}}{1+\frac{ar^2}{3}+\frac{b}{r}}\,, \qquad\qquad F^1 = -\,c^2\left(\frac{ar}{3}-\frac{b}{2r^2}\right) \end{aligned}\right\},\tag{5.75}$$

в котором действуют как ньютоновские силы, так и λ-силы: оно заполнено вакуумом и включает островные массы, создающие ньютоновские силы тяготения. Вместе с тем, Коттлер вывел свою метрику с точностью до двух констант a и b, для определения которых требуется задавать какие-то дополнительные условия. Поэтому, несмотря на привлекательность метрики Коттлера, практический интерес представляют лишь два ее "крайних" случая — метрика Шварцшильда (ньютоновские силы тяготения) и метрика де Ситтера (λ-силы).

§ 5.6 Гравитационный коллапс

Конечно, представляя нашу Вселенную как пространство де Ситтера (заполненное вакуумом без "островов" массы), или как пространство Шварцшильда ("острова" массы в пустоте), мы делаем некоторое допущение. Реальная метрика нашего мира представляет собой нечто "среднее". Тем не менее, при решении задач, связанных с действием сил неньютоновской гравитации (порождаемых вакуумом), когда мы абстрагируемся от влияния тяготеющих масс, наиболее оптимально использовать метрику де Ситтера. И, наоборот, при решении задач, связанных с полями тяготеющих масс, резонно использовать метрику Шварцшильда. Характерным примером такого "разделения" задач может служить коллапс — состояние пространства-времени, при котором $g_{00}=0$.

Гравитационный потенциал w для произвольной метрики имеет вид (1.38). Тогда

$$g_{00} = \left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2 = 1 - \frac{2\mathrm{w}}{c^2} + \frac{\mathrm{w}^2}{c^4}\,, \tag{5.76}$$

т.е. коллапс $g_{00}=0$ наступает при $\mathrm{w}=c^2$.

В основном, в физике рассматривается *гравитационный коллапс* — сжатие острова массы под воздействием сил ньютоновской гравитации вплоть до его гравитационного радиуса. Поэтому гравитационный коллапс в "чистом виде" предстает перед нами в пространстве с метрикой Шварцшильда (5.69), в котором присутствует только ньютоновское поле сферически симметричного "острова" массы в пустоте.

На больших расстояниях от тяготеющей массы гравитационное поле является слабым, поэтому там выполняется закон тяготения Ньютона. Следовательно, в слабом поле ньютоновской гравитации потенциал имеет вид

$$\mathrm{w} = \frac{GM}{r}\,, \tag{5.77}$$

где G постоянная тяготения Ньютона, M масса тела, создающего данное поле тяготения. В слабом поле третий член в (5.76) пренебрежимо мал и выражение для g_{00} имеет вид

$$g_{00} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}\,, \tag{5.78}$$

т.е. гравитационный коллапс (обращение в нуль временной компоненты g_{00} метрического тензора пространства) в пространстве с мет-

рикой Шварцшильда наступает при условии

$$\frac{2GM}{c^2 r} = 1\,, \tag{5.79}$$

где величина

$$r_g = \frac{2GM}{c^2}\,, \tag{5.80}$$

имеющая размерность длины, называется *гравитационным радиусом.* Тогда g_{00} можно записать в виде

$$g_{00} = 1 - \frac{r_g}{r}\,. \tag{5.81}$$

Отсюда видно, что при $r = r_g$ в пространстве с метрикой Шварцшильда имеет место коллапс. В этом случае вся масса сферически симметричного тела (источника ньютоновского поля) оказывается сосредоточенной под его гравитационным радиусом. Поэтому поверхность сферического тела, радиус которого равен его гравитационному радиусу, называется *сферой Шварцшильда.* Иначе такие объекты называют *черными дырами*, т.к. под гравитационным радиусом вторая космическая скорость превышает скорость света и таким образом свет не может "выйти" из этих объектов наружу.

Как видно из метрики (5.69), в поле тяготения Шварцшильда трехмерное пространство не вращается ($g_{0i} = 0$), следовательно, интервал наблюдаемого времени (1.25) имеет вид

$$d\tau = \sqrt{g_{00}}\,dt = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}\;dt\,, \tag{5.82}$$

т.е. при $r = r_g$ интервал наблюдаемого времени $d\tau = 0$. Иначе говоря, для внешнего наблюдателя время на поверхности сферы Шварцшильда останавливается*. Внутри сферы Шварцшильда интервал наблюдаемого времени становится мнимым. Мы также можем сказать с уверенностью, что обычный земной наблюдатель, живущий

---

*При $g_{00} = 0$ (коллапс) интервал наблюдаемого времени (1.25) равен $d\tau = -\frac{1}{c^2}v_i dx^i$, где $v_i = -c\frac{g_{0i}}{\sqrt{g_{00}}}$ скорость вращения пространства (1.37). Только полагая $g_{0i} = 0$ и $v_i = 0$, условие коллапса можно определить корректно: для внешнего наблюдателя время на поверхности коллапсара останавливается $d\tau = 0$, а четырехмерный интервал равен $ds^2 = -d\sigma^2 = g_{ik}\,dx^i dx^k$. Отсюда можно сделать единственный вывод: на поверхности коллапсара пространство является голономным (коллапсар не вращается). В нашей книге [19] было показано, что нуль-пространство коллапсирует, если не вращается. Здесь же доказана более общая теорема: если $g_{00} = 0$, то пространство является голономным независимо от того, является оно вырожденным ($g = 0$, нуль-пространство) или для него $g < 0$ (пространство-время Общей Теории Относительности).

на поверхности планеты, явно находится вне сферы Шварцшильда радиусом 0.443 см и может рассматривать процесс коллапса тел только "извне".

Если $r = r_g$, то величина

$$g_{11} = -\frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} \tag{5.83}$$

стремится к бесконечности. Однако детерминант фундаментального метрического тензора $g_{\alpha\beta}$ равен

$$g = -r^4 \sin^2\theta < 0\,, \tag{5.84}$$

поэтому пространство-время внутри гравитационного коллапсара в общем случае не является вырожденным, хотя коллапс также возможен и в нуль-пространстве. Здесь надо сделать замечание относительно фотометрического расстояния и метрического наблюдаемого расстояния. Величина r не является метрическим расстоянием в направлении оси $x^1 = r$, т.к. в выражении для метрики (5.69) dr^2 входит с коэффициентом $\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}$. Величина r представляет собой *фотометрическое расстояние*, определяемое как функция освещенности, создаваемой постоянным источником света, обратно пропорциональной квадрату расстояния. Иными словами, r есть радиус неевклидовой сферы площадью $4\pi r^2$ (см. лекции Зельманова [12]).

Метрическое элементарное наблюдаемое расстояние между двумя точками в пространстве с метрикой Шварцшильда, согласно теории хронометрических инвариантов, имеет вид

$$d\sigma = \sqrt{\frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right)}\,. \tag{5.85}$$

При $\theta = const$ и $\varphi = const$ оно составляет

$$\sigma = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{h_{11}}\, dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}} \tag{5.86}$$

и не совпадает с фотометрическим расстоянием r.

Теперь определим метрику пространства-времени внутри сферы Шварцшильда. Для этого запишем внешнюю метрику (5.69) для радиуса $r < r_g$. В результате имеем

$$ds^2 = -\left(\frac{r_g}{r} - 1\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\frac{r_g}{r} - 1} - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right). \tag{5.87}$$

Вводя переобозначения $r = c\tilde{t}$ и $ct = \tilde{r}$, получаем

$$ds^2 = \frac{c^2 d\tilde{t}^2}{\frac{r_g}{c\tilde{t}} - 1} - \left(\frac{r_g}{c\tilde{t}} - 1\right) d\tilde{r}^2 - c^2 d\tilde{t}^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right), \qquad (5.88)$$

т.е. метрика пространства-времени внутри сферы Шварцшильда аналогична внешней метрике при условии, что временная координата и пространственная радиальная координата r меняются местами: фотометрическое расстояние r вне черной дыры есть координатное время $c\tilde{t}$ внутри черной дыры, тогда как координатное время вне черной дыры ct является фотометрическим расстоянием $\tilde{r}$ внутри ее.

Из первого члена внутренней метрики Шварцшильда (5.88) видно, что она является нестационарной и реализуется на ограниченном интервале времени

$$\tilde{t} = \frac{r_g}{c}\,. \qquad (5.89)$$

Для Солнца, гравитационный радиус которого равен примерно 3 км, время существования такого пространства составило бы всего лишь $< 10^{-5}$ сек. Для Земли, гравитационный радиус которой составляет всего 0.443 см, “время жизни” внутренней метрики Шварцшильда еще меньше: 1.5×10^{-11} сек.

Из сравнения метрик внутри (5.88) и снаружи (5.69) гравитационного коллапсара следует:

1) пространство отсчета обеих метрик является голономным, т.е. не вращается ($A_{ik} = 0$);
2) внешняя метрика стационарна, вектор гравитационно-инерциальной силы равен $F^1 = -\frac{GM}{r^2}$;
3) внутренняя метрика нестационарна, вектор гравитационно-инерциальной силы равен нулю.

Исследуем более детально внешнюю и внутреннюю метрику, полагая для простоты $\theta = const$ и $\varphi = const$, т.е. ограничиваясь из пространственных направлений только радиальным. Тогда внешняя метрика примет вид

$$ds^2 = -\left(\frac{r_g}{r} - 1\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\frac{r_g}{r} - 1}\,, \qquad (5.90)$$

внутренняя метрика, соответственно

$$ds^2 = \frac{c^2 d\tilde{t}^2}{\frac{r_g}{c\tilde{t}} - 1} - \left(\frac{r_g}{c\tilde{t}} - 1\right) d\tilde{r}^2. \qquad (5.91)$$

Определим физическое наблюдаемое расстояние (5.86) в радиальном направлении к центру тяжести коллапсара. Получаем

$$\sigma = \int \frac{dr}{\sqrt{1-\frac{r_g}{r}}} = \sqrt{r\,(r-r_g)} + r_g \ln\left(\sqrt{r}+\sqrt{r-r_g}\right) + const \quad (5.92)$$

вдоль направления r. Отсюда видно: при $r = r_g$ наблюдаемое расстояние

$$\sigma_g = r_g \ln\sqrt{r_g} + const \quad (5.93)$$

и является постоянной величиной.

Это означает, что сферу Шварцшильда, определяемую фотометрическим радиусом r_g, внешний наблюдатель воспринимает в виде сферы, наблюдаемый радиус которой равен $\sigma_g = r_g \ln\sqrt{r_g} + const$ (5.93). Таким образом, для внешнего наблюдателя гравитационный коллапсар (черная дыра) представляет собой сферу с постоянным наблюдаемым радиусом, на поверхности которого время останавливается. Теперь рассмотрим гравитационный коллапсар изнутри. Интервал наблюдаемого времени (5.82) внутри сферы Шварцшильда для внешнего наблюдателя является мнимым

$$d\tau = i\sqrt{\frac{r_g}{r}-1}\;dt\,, \quad (5.94)$$

или, во "внутренних" координатах $r = c\tilde{t}$ и $ct = \tilde{r}$ (с точки зрения "внутреннего" наблюдателя),

$$d\tilde{\tau} = \frac{1}{\sqrt{\frac{r_g}{c\tilde{t}}-1}}\,d\tilde{t}\,. \quad (5.95)$$

Следовательно, для внешнего наблюдателя внутреннее "мнимое" время коллапсара останавливается на его поверхности, тогда как для "внутреннего" наблюдателя темп наблюдаемого времени на поверхности бесконечно возрастает. Метрическое расстояние внутри коллапсара с точки зрения внешнего наблюдателя, согласно метрики (5.87), имеет вид

$$\sigma = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{r_g}{r}-1}} = -\sqrt{r\,(r-r_g)} + r_g \arctan\sqrt{\frac{r_g}{r}-1} + const, \quad (5.96)$$

или, с точки зрения "внутреннего" наблюдателя,

$$\tilde{\sigma} = \int \sqrt{\frac{r_g}{c\tilde{t}}-1}\;dr\,. \quad (5.97)$$

Отсюда видно: при $r=c\tilde{t}=r_g$ для внешнего наблюдателя наблюдаемое расстояние между двумя точками стремится к постоянному значению, тогда как для "внутреннего" наблюдателя трехмерный наблюдаемый интервал стремится к нулю. В заключение исследуем вопрос о том, что происходит с частицами, которые "снаружи" радиально падают на сферу Шварцшильда. Внешнюю метрику можно записать в виде

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - d\sigma^2, \quad d\tau = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt\,, \quad d\sigma = \frac{dr}{1 - \frac{r_g}{r}}\,. \qquad (5.98)$$

Для частиц с вещественной массой $ds^2>0$, для светоподобных частиц $ds^2=0$, для сверхсветовых тахионов $ds^2<0$ (их масса является мнимой). При радиальном движении к черной дыре эти условия можно записать в виде:

1) вещественные частицы: $\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 < c^2\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^2$;

2) светоподобные частицы: $\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = c^2\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^2$;

3) мнимые частицы (тахионы): $\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 > c^2\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^2$.

На сфере Шварцшильда $r=r_g$, поэтому $\frac{d\tau}{dt}=0$, т.е. частица, в том числе и светоподобная, там останавливается. Четырехмерный интервал на сфере Шварцшильда

$$ds^2 = -d\sigma^2 < 0\,, \qquad (5.99)$$

т.е. является пространственно-подобным. Отсюда следует, что сферу Шварцшильда заполняют частицы с мнимой массой покоя.

§ 5.7 Инфляционный коллапс

В пространстве де Ситтера островов масс нет, следовательно, отсутствует и поле ньютоновской гравитации — гравитационный коллапс невозможен. Тем не менее, условие $g_{00}=0$ представляет собой чисто геометрическое определение коллапса, не обязательно связанное с ньютоновскими полями, и мы вполне можем рассмотреть его в любом пространстве. Итак, рассмотрим пространство с метрикой де Ситтера (5.73), характеризующей неньютоновское поле гравитации в пространстве постоянной кривизны без "острова" массы. В этом случае коллапс должен осуществляться за счет сил неньютоновской гравитации. Из метрики де Ситтера (5.73) видно, что компонента

$$g_{00} = 1 - \frac{\lambda r^2}{3}\,, \qquad (5.100)$$

т.е. гравитационный потенциал $\mathrm{w} = c^2(1-\sqrt{g_{00}})$ в пространстве де Ситтера равен

$$\mathrm{w} = c^2\left(1-\sqrt{1-\frac{\lambda r^2}{3}}\right). \tag{5.101}$$

Так как он является потенциалом поля неньютоновской гравитации, созданного вакуумом, мы будем называть его λ-потенциалом. Из этого выражения видно, что λ-потенциал равен нулю в предельном случае, когда пространство де Ситтера становится плоским (т.е. когда $\lambda = 3K = 0$).

Так как в пространстве де Ситтера $\lambda = 3K$, следовательно:

1) $g_{00} = 1 - Kr^2 > 0$ при расстояниях $r < \frac{1}{\sqrt{K}}$;
2) $g_{00} = 1 - Kr^2 < 0$ при расстояниях $r > \frac{1}{\sqrt{K}}$;
3) $g_{00} = 1 - Kr^2 = 0$ (коллапс) при расстояниях $r = \frac{1}{\sqrt{K}}$.

При кривизне $K < 0$ величина $g_{00} = 1 - Kr^2$ всегда больше нуля. Таким образом коллапс возможен только в пространстве де Ситтера с положительной кривизной $K > 0$.

Пространство нашей Вселенной в целом, как было показано в §5.3, имеет $K < 0$. Однако мы можем предположить наличие в нем локальных неоднородностей с $K > 0$, не влияющих на на кривизну пространства в целом, в том числе и таких, где имеет место коллапс. Поэтому пространство де Ситтера с $K > 0$ имеет смысл рассматривать как локальное пространство каких-то компактных объектов, например – пространство внутри элементарных частиц.

Трехмерная наблюдаемая кривизна C связана с четырехмерной кривизной соотношением $C = -6K$ (5.55). Тогда, представляя трехмерное пространство в виде сферы, получаем $C = \frac{1}{R^2}$ (5.57) и, соответственно, $K = -\frac{1}{6R^2}$ (5.58), где R трехмерный наблюдаемый радиус кривизны. В случае $K < 0$ величина R является вещественной. При $K > 0$ величина R является мнимой.

Коллапс в пространстве де Ситтера возможен только при $K > 0$. В этом случае наблюдаемый радиус кривизны мнимый. Обозначим $R = iR^*$, где R^* его абсолютная величина. Тогда в пространстве де Ситтера с $K > 0$

$$K = \frac{1}{6R^{*2}}\,, \tag{5.102}$$

и условие коллапса $g_{00} = 1 - Kr^2$ можно записать в виде

$$r = R^*\sqrt{6}\,. \tag{5.103}$$

т.е. на расстоянии $r = R^*\sqrt{6}$ в пространстве де Ситтера с $K > 0$ величина $g_{00} = 0$ и, следовательно, происходит остановка наблюдаемого времени — наступает коллапс.

Иначе говоря, область пространства де Ситтера под радиусом $r = R^*\sqrt{6}$ пребывает в состоянии коллапса. Учитывая, что вакуум, являющийся "заполнителем" пространства де Ситтера, находится в состоянии инфляции, назовем состояние данной сколлапсировавшей области *инфляционным коллапсом*, а величину $r = R^*\sqrt{6}$ (5.77) *инфляционным радиусом* r_{inf}. Тогда сколлапсировавшую область пространства де Ситтера под инфляционным радиусом мы будем называть *инфляционным коллапсаром*, или — *инфлянтоном.*

Внутри инфлянтона, соответственно, $K > 0$, (наблюдаемая трехмерная кривизна $C < 0$). В этом случае плотность вакуума отрицательна (инфляционное давление положительно, вакуум сжимается) и $\lambda > 0$, т.е. неньютоновские силы являются силами отталкивания. Это означает, что инфляционный коллапсар (инфлянтон) заполнен вакуумом отрицательной плотности и существует, балансируя на "лезвии бритвы" между сжимающим давлением вакуума и растягивающими силами неньютоновской гравитации. Элементарный интервал наблюдаемого времени в пространстве де Ситтера с $K > 0$ имеет вид

$$d\tau = \sqrt{g_{00}}\, dt = \sqrt{1 - Kr^2}\; dt = \sqrt{1 - \frac{r^2}{r_{\text{inf}}^2}}\; dt\,, \qquad (5.104)$$

т.е. на поверхности инфляционной сферы наблюдаемое время останавливается $d\tau = 0$. Принятая нами сигнатура $(+---)$, т.е. условие $g_{00} > 0$, имеет место при $r < r_{\text{inf}}$.

Используя понятие инфляционного радиуса, запишем метрику де Ситтера с $K > 0$ в следующем виде

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r^2}{r_{\text{inf}}^2}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{r_{\text{inf}}^2}} - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right), \qquad (5.105)$$

Компоненты гравитационно-инерциальной силы (5.74) в этом случае имеют вид

$$F_1 = \frac{c^2}{1 - \frac{r^2}{r_{\text{inf}}^2}}\,\frac{r}{r_{\text{inf}}^2}\,, \qquad F^1 = c^2\,\frac{r}{r_{\text{inf}}^2}\,. \qquad (5.106)$$

Теперь найдем наблюдаемое расстояние и наблюдаемый инфляционный радиус. Для простоты будем полагать, что $\theta = const$ и

$\varphi = const$, т.е. из пространственных направлений ограничимся только радиальным. Тогда наблюдаемый трехмерный интервал имеет следующий вид

$$\sigma = \int \sqrt{h_{11}}\, dr = \int \frac{dr}{\sqrt{1-Kr^2}} = r_{\text{inf}} \arcsin \frac{r}{r_{\text{inf}}} + const, \tag{5.107}$$

и, соответственно, наблюдаемый инфляционный радиус имеет постоянное значение

$$\sigma_{\text{inf}} = \int_0^{r_{\text{inf}}} \frac{dr}{\sqrt{1-Kr^2}} = \frac{\pi}{2}\, r_{\text{inf}}\,. \tag{5.108}$$

В пространстве с метрикой Шварцшильда, которое мы рассмотрели в предыдущем параграфе, коллапсар представляет собой сколлапсировавшую компактную массу, создающую кривизну пространства в целом: обычный наблюдатель находится вне гравитационого коллапсара. В пространстве де Ситтера коллапсар представляет собой вакуум, заполняющий все пространство. Область коллапса в пространстве де Ситтера сравнима с поверхностью, радиус которой равен радиусу кривизны пространства, поэтому обычный наблюдатель находится под поверхностью инфляционного коллапсара, рассматривая коллапс "изнутри". Чтобы заглянуть за пределы инфляционного коллапсара, запишем метрику де Ситтера с $K > 0$ (5.105) для $r > r_{\text{inf}}$. Ограничиваясь из пространственных направлений только радиальным, получаем в координатах обычного наблюдателя ("внутренние" координаты инфляционного коллапсара)

$$ds^2 = -\left(\frac{r^2}{r_{\text{inf}}^2} - 1\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\frac{r^2}{r_{\text{inf}}^2} - 1}\,, \tag{5.109}$$

или, с точки зрения наблюдателя, находящегося вне коллапсара (во "внешних" координатах коллапсара $r = c\tilde{t}$ и $ct = \tilde{r}$)

$$ds^2 = \frac{c^2 d\tilde{t}^2}{\frac{c^2\tilde{t}^2}{r_{\text{inf}}^2} - 1} - \left(\frac{c^2\tilde{t}^2}{r_{\text{inf}}^2} - 1\right) d\tilde{r}^2. \tag{5.110}$$

§ 5.8 Заключение

При низкой плотности материи (примерно $5 \div 10 \times 10^{-30}$ грамм/см^3 в Метагалактике) пространство можно считать приблизительно пустым и мы можем с уверенностью полагать тензор энергии-импульса равным $T_{\alpha\beta} \sim g_{\alpha\beta}$. В этом случае уравнения Эйнштейна имеют вид

$R_{\alpha\beta} = k\,g_{\alpha\beta}$, где $k = const$ (такое пространство является *пространством Эйнштейна*). Существует особый тип таких пространств: $T_{\alpha\beta} = \mu\,g_{\alpha\beta}$, где $\mu = const$ есть плотность материи. Этот тип тензора энергии-импульса характеризует вакуумоподобное состояние материи, известное как *μ-вакуум*.

В той главе мы показали физический смысл компонент тензора энергии-импульса вакуума $\breve{T}_{\alpha\beta} = \lambda\,g_{\alpha\beta}$ и тензора энергии-импульса μ-вакуума $T_{\alpha\beta} = \mu\,g_{\alpha\beta}$. Мы также получили математические выражения для физических наблюдаемых свойств вакуума и μ-вакуума, таких, как плотность, плотность импульса и тензор напряжений: в итоге мы получили, что вакуум является однородной, невязкой, неизлучающей и инфляционной (расширяющейся при положительной плотности) средой. Исходя из результатов Петрова и Глинера и принимая во внимание выражение для тензора энергии-импульса вакуума и μ-вакуума (и, следовательно, существование их физических свойств), мы предложили "геометрическую" классификацию материи в соответствии с ее тензором энергии-импульса. Мы назвали ее *Т-классификацией материи*: *пустота* (пустое пространство-время) — состояние реализующееся когда тензор энергии-импульса равен нулю ($T_{\alpha\beta} = 0$) и нет сил неньютоновской гравитации ($\lambda = 0$); *вакуум* — состояние, при котором нет вещества ($T_{\alpha\beta} = 0$), но есть неньютоновская гравитация ($\lambda \neq 0$); *μ-вакуум* $T_{\alpha\beta} = \mu\,g_{\alpha\beta}$, $\mu = const$ (вакуумоподобное состояние материи); *вещество* $T_{\alpha\beta} \neq 0$, $T_{\alpha\beta} \nsim g_{\alpha\beta}$ (включает обычное вещество и электромагнитное поле).

Обычный опыт показывает, что плотность материи во Вселенной положительна. При положительной плотности вакуума, космологический член имеет знак $\lambda < 0$ (неньютоновские гравитационные силы являются силами притяжения) и инфляционное давление вакуума является положительным (вакуум расширяется).

Исследуя пространства, заполненные исключительно вакуумом (без вещества), такие как пространство де Ситтера, мы обнаружили, что условие коллапса ($g_{00} = 0$) реализуется в таком пространстве в виде специфической области (объекта), который мы назвали *инфляционный коллапсар*, или *инфлянтон*. Внутри инфлянтона $\lambda > 0$, т.е. плотность вакуума отрицательна, давление положительно, а неньютоновские силы гравитации являются силами отталкивания, делая инфлянтон балансирующим между сжимающим давлением вакуума и расширяющими силами неньютоновской гравитации.

Глава 6 Зеркальная Вселенная

§6.1 Концепция зеркальной Вселенной

Как мы упоминали в §5.1, попытки представить наш мир и зеркальную Вселенную в виде пространств положительной и отрицательной кривизны закончились неудачей: даже в рамках метрики де Ситтера, одной из наиболее простых пространственно-временных метрик, траектории в пространстве с положительной кривизной принципиально отличаются от траекторий в пространстве с отрицательной кривизной (см. Главу VII в книге Синга [36]).

Вместе с тем многие исследователи, начиная с Дирака, интуитивно чувствовали, что зеркальную Вселенную (как антипод нашей Вселенной) следует искать не в пространстве с другим знаком кривизны, а в пространстве с другим знаком масс и энергий частиц. То есть, т.к. массы частиц нашего мира являются положительными, то массы частиц зеркальной Вселенной, по-видимому, должны быть отрицательными.

Джозеф Вебер пишет в своей книге [29]: “Ни закон всемирного тяготения Ньютона, ни релятивистская теория гравитации не исключают возможности существования отрицательных масс, но эмпирический факт состоит в том, что такие масс никогда не наблюдались. Как из теории тяготения Ньютона, так и из Общей Теории Относительности вытекало бы поведение отрицательных масс, в корне отличное от соответствующей ситуации в электродинамике. <. . . > Для двух тел, одно из которых обладает положительной массой, а другое — отрицательной, но равной первой по абсолютному значению, следовало бы ожидать, что положительная масса будет притягивать отрицательную, а отрицательная — отталкивать положительную, так что одна будет гнаться за другой! Если движение будет совершаться по линии, соединяющей центры тел, то такая система будет двигаться с постоянным ускорением. Эту задачу рассмотрел Х. Бонди [43]” Леонард Шифф, предположив пассивную гравитационную массу позитрона отрицательной (его инертная масса, как известно из наблюдений, положительна), основываясь на методах квантовой электродинамики, вычислил разницу между инертной и гравитационной массами позитрона. Эта разница получилась существенно больше точности измерений в эксперименте Этвеша, иллюс-

трирующего равенство инертной и гравитационной масс [44]. В результате Шифф пришел к выводу, о том, что возможность отрицательной гравитационной массы у позитрона исключается (подробнее см. Главу 1 в книге Вебера [29]). Кроме того, при совместном "проживании" в одной и той же пространственно-временной области, частицы с положительными и отрицательными массами должны непрерывно аннигилировать. Возможные космологические последствия "смешанного" существования частиц с отрицательными и с положительными массами исследовал Я. П. Терлецкий [45, 46].

То есть, развитию идеи о зеркальной Вселенной как мире с отрицательными массами и энергиями препятствовали два момента:

1) отсутствие экспериментальных фактов существования отрицательных масс;
2) отсутствие теории, которая бы четко обосновала разделение миров с положительной и отрицательной массами в пространстве-времени Общей Теории Относительности.

Соответственно, решающими для разрешения проблемы зеркальной Вселенной могли бы стать:

1) *experimentum crucis*, прямо указывающий на проявления обменных взаимодействий между нашим миром и зеркальной Вселенной;
2) теоретическое исследование геометрическими методами Общей Теории Относительности, в рамках которого удастся показать, что миры с положительной и отрицательной массами разделены пространственно-временной мембраной, а также вычислить условия возможного проникновения частиц обоих миров через разделяющую мембрану *experimentum crucis*.

В этой главе мы предпримем попытку решить вторую (теоретическую) часть этой проблемы.

Итак, рассмотрим понятие "зеркальность" в применении к метрике четырехмерного пространства-времени. Для решения этой задачи запишем квадрат четырехмерного интервала в хронометрически инвариантном виде

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - d\sigma^2, \tag{6.1}$$

где

$$d\sigma^2 = h_{ik}\, dx^i dx^k, \tag{6.2}$$

$$d\tau = \left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right) dt - \frac{1}{c^2}\, v_i dx^i = \left(1 - \frac{\mathrm{w} + v_i u^i}{c^2}\right) dt\,. \tag{6.3}$$

Отсюда, в частности, видно, что элементарный пространственный интервал (6.2) представляет собой квадратичную функцию относительно элементарных пространственных приращений dx^i. Пространственные координаты x^i равноправны: не существует принципиальных различий между поступательными движениями вправо-влево и вверх-вниз. Поэтому мы вообще не будем касаться зеркальных отражений относительно пространственных координат.

Другое дело — время. Физическое наблюдаемое (собственное) время τ обычного наблюдателя всегда течет по направлению из прошлого в будущее, следовательно, $d\tau > 0$. Но есть два случая, когда наблюдаемое время останавливается. Во-первых, это возможно в обычном пространстве-времени в состоянии коллапса. Во-вторых, это происходит в нуль-пространстве — вырожденном пространстве-времени. Таким образом, состояние наблюдателя, собственное время которого останавливается, можно считать пограничным, т.е. недостижимым в обычном его состоянии.

Мы будем рассматривать проблему зеркальности как для $d\tau > 0$, так и для $d\tau = 0$. В последнем случае исследование будет проведено отдельно для сколлапсировавших областей обычного пространства-времени и для нуль-пространства.

Начнем с обычного случая, где $d\tau > 0$. Из выражения для наблюдаемого времени (6.3) очевидно, что это условие имеет место при

$$\mathrm{w} + v_i u^i < c^2. \tag{6.4}$$

В отсутствие вращения пространства ($v_i = 0$) оно принимает вид $\mathrm{w} < c^2$, что соответствует пространственно-временной структуре, находящейся вне состояния коллапса.

Квадрат четырехмерного интервала ds^2 (6.1) можно записать в развернутом виде

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2 c^2 dt^2 - 2\left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right) v_i\, dx^i dt - \\ - h_{ik}\, dx^i dx^k + \frac{1}{c^2}\, v_i v_k\, dx^i dx^k, \tag{6.5}$$

с другой стороны

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - d\sigma^2 = c^2 d\tau^2 \left(1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right), \qquad \mathrm{v}^2 = h_{ik}\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k. \tag{6.6}$$

Поделив обе части выражения ds^2 (6.5) на

1) $c^2 d\tau^2 \left(1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)$, если $ds^2 > 0$;

2) $c^2 d\tau^2$, если $ds^2 = 0$;

3) $-c^2 d\tau^2 \left(\frac{\mathrm{v}^2}{c^2} - 1\right)$, если $ds^2 < 0$,

во всех трех случаях получим одно и то же квадратное уравнение относительно функции хода координатного времени объекта t от хода собственного времени наблюдателя τ

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \frac{2v_i \mathrm{v}^i}{c^2\left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)}\frac{dt}{d\tau} + \frac{1}{\left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2}\left(\frac{1}{c^4}\, v_i v_k \mathrm{v}^i \mathrm{v}^k - 1\right) = 0\,, \tag{6.7}$$

которое имеет два корня

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)_1 = \frac{1}{1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}}\left(\frac{1}{c^2}\, v_i \mathrm{v}^i + 1\right), \tag{6.8}$$

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)_2 = \frac{1}{1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}}\left(\frac{1}{c^2}\, v_i \mathrm{v}^i - 1\right). \tag{6.9}$$

Интегрируя координатное время объекта t по аргументу τ, получаем выражение

$$t = \frac{1}{c^2}\int \frac{v_i dx^i}{1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}} \pm \int \frac{d\tau}{1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}} + const. \tag{6.10}$$

Это выражение легко интегрируется, если пространство не вращается и гравитационный потенциал $\mathrm{w} = 0$. Тогда интеграл имеет вид $t = \pm\tau + const$. Выбором начальных условий можно сделать константу интегрирования равной нулю. В этом случае выражение для координатного времени t принимает вид

$$t = \pm\tau\,, \qquad \tau > 0\,, \tag{6.11}$$

график которого представляет два луча, являющимися продолжением друг друга относительно $\tau > 0$. Можно сказать, что зеркалом (мембраной) здесь является собственное время наблюдателя, а само зеркало разделяет два мира: в одном мире координатное время (наблюдаемое изменение временной координаты) течет из прошлого в будущее, тогда как в другом, зеркальном мире, координатное время течет из будущего в прошлое.

Отметим, что мир с обратным ходом времени не является кинолентой, пущеной в обратную сторону. Оба мира вполне равноправны, но, с точки зрения обычного наблюдателя, в зазеркалье

значение временной координаты отрицательно. Зеркало (мембрана) в данном случае является плоским, т.е. оно отражает ход времени, но не влияет на него.

Теперь, пусть пространство не вращается ($v_i = 0$), но гравитационный потенциал не равен нулю $\mathrm{w} \neq 0$. Тогда

$$t = \pm \int \frac{d\tau}{1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}} + const. \tag{6.12}$$

Если гравитационное поле является слабым ($\mathrm{w} \ll c^2$), то интеграл имеет вид

$$t = \pm \left(\tau + \frac{1}{c^2} \int \mathrm{w}\, d\tau \right) = \pm \left(\tau + \Delta t \right), \tag{6.13}$$

где Δt поправка, обусловленная наличием поля потенциала w, создающего ускорение. Величина w может описывать любое скалярное поле, связанное с нулевой компонентой g_{00} фундаментального метрического тензора: как поле ньютоновского потенциала, так и поле неньютоновской гравитации.

Если гравитационное поле, создаваемое потенциалом w, является сильным, то интеграл имеет вид (6.12) и зависит от потенциала w: чем сильнее поле w, тем быстрее течет координатное время (6.12). В пределе, когда $\mathrm{w} = c^2$, мы имеем $t \rightarrow \infty$. Вместе с тем, при $\mathrm{w} = c^2$ наступает коллапс ($d\tau = 0$). Этот случай будет рассмотрен позднее, поэтому сейчас мы по-прежнему будем полагать $\mathrm{w} < c^2$.

Рассмотрим координатное время в пространствах с конкретными метриками: в пространстве с метрикой Шварцшильда и в пространстве с метрикой де Ситтера.

Если потенциал w характеризует ньютоновское гравитационное поле (пространство с метрикой Шварцшильда), тогда

$$t = \pm \int \frac{d\tau}{1 - \frac{GM}{c^2 r}} = \pm \int \frac{d\tau}{1 - \frac{r_g}{r}}, \tag{6.14}$$

откуда следует, что чем ближе к гравитационному радиусу тяготеющей массы, тем сильнее ход координатного времени отличается от хода собственного времени наблюдателя. Если w представляет собой потенциал неньютоновского поля гравитации (пространство де Ситтера), тогда

$$t = \pm \int \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \frac{\lambda r^2}{3}}} = \pm \int \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{r^2_{\rm inf}}}}, \tag{6.15}$$

из чего видно, что чем ближе фотометрическое расстояние r к инфляционному радиусу коллапсара, тем быстрее (по абсолютной величине) течет координатное время. В пределе при $r \to r_{\text{inf}}$ величина $t \to \infty$.

Таким образом, в отсутствие вращения пространства, но при наличии гравитационного потенциала, координатное время в обычном и зеркальном пространствах течет тем быстрее, чем больше потенциал присутствующего поля.

Теперь исследуем общий случай, когда имеют место и вращение пространства и гравитационное поле. Тогда интеграл для t имеет вид (6.10), т.е. координатное время в неголономном (вращающемся) пространстве складывается из двух частей:

1) "вращательного" времени, обусловленного наличием члена $v_i dx^i$, имеющего размерность момента вращения, отнесенного к единице массы;
2) обычного координатного времени, связанного с ходом собственного времени наблюдателя.

Из интеграла для t (6.10) видно, что вращательное координатное время, образованное вращением самого пространства, существует и без наблюдателя (т.к. оно не зависит от τ). Для наблюдателя, покоящегося на поверхости Земли (за исключением полюсов) оно может быть интерпретировано как течение времени, обусловленное вращением нашей планеты. Оно есть всегда независимо от того, фиксирует его наблюдатель в данном месте планеты или нет. Обычное координатное время связано с наличием наблюдателя (зависит от его собственного времени τ) и с полем, существующим в точке наблюдения, в частности, с полем ньютоновского потенциала.

Отметим, что при $v_i \neq 0$ значение временной координаты t в начальный момент наблюдения (когда собственное время наблюдателя $\tau_0 = 0$) отлично от нуля.

Записывая интеграл для t (6.10) в виде

$$t = \int \frac{\frac{1}{c^2}\, v_i dx^i \pm d\tau}{1 - \frac{\text{w}}{c^2}}\,, \tag{6.16}$$

получаем, что подинтегральное выражение:

1) положительно, если $\frac{1}{c^2}\, v_i dx^i > \mp d\tau$;
2) равно нулю, если $\frac{1}{c^2}\, v_i dx^i = \pm d\tau$;
3) отрицательно, если $\frac{1}{c^2}\, v_i dx^i < \mp d\tau$.

Следовательно, координатное время t для вещественного наблюдателя останавливается, если скалярное произведение скорости вращения на наблюдаемую скорость поступательного движения объекта равна квадрату скорости света $v_i \mathrm{v}^i = \pm c^2$. Это происходит, когда обе скорости по абсолютной величине равны скорости света, а по направлению либо совпадают, либо направлены в противоположные стороны.

Область пространства-времени, удовлетворяющая условию $v_i \mathrm{v}^i = \pm c^2$, при котором координатное время для вещественного наблюдателя останавливается, является *мембраной-зеркалом*), разделяющим области пространства с положительными и отрицательными значениями временной координаты — области с прямым и обратным ходом времени.

Очевидно также, что обычный вещественный (досветовой) наблюдатель не может сопутствовать такому пространству отсчета (телу отсчета).

Назовем *зеркальным пространством* такую область пространства-времени, в которой координатное время имеет отрицательные значения. Рассмотрим свойства частиц в зеркальном пространстве по отношению к свойствам частиц обычного мира, где временная координата положительна.

Физические наблюдаемые компоненты четырехмерного вектора импульса массовой частицы с массой покоя m_0, т.е. вектора

$$P^\alpha = m_0 \frac{dx^\alpha}{ds}\,, \tag{6.17}$$

имеют вид

$$\frac{P_0}{\sqrt{g_{00}}} = m\frac{dt}{d\tau} = \pm\, m\,, \qquad P^i = \frac{m}{c}\,\mathrm{v}^i, \tag{6.18}$$

где знак “плюс” имеет место при прямом ходе координатного времени, а знак “минус” при обратном ходе координатного времени относительно собственного времени наблюдателя. Квадрат четырехмерного вектора импульса имеет вид

$$P_\alpha P^\alpha = g_{\alpha\beta}\, P^\alpha P^\beta = m_0^2\,, \tag{6.19}$$

а его длина равна

$$\left|\sqrt{P_\alpha P^\alpha}\,\right| = m_0\,. \tag{6.20}$$

Таким образом, любая частица с ненулевой массой покоя, представляющая собой четырехмерную (пространственно-временную) структуру, проецируется на время как диполь, состоящий из положительной массы $+m$ и отрицательной массы $-m$. Но при проеци-

ровании P^α на трехмерное пространство наблюдателя (пространственное сечение), обе проекции сливаются в одну — трехмерный наблюдаемый импульс $p^i = m\mathrm{v}^i$. Иными словами, каждая наблюдаемая частица с положительной релятивистской массой обладает *зеркальным двойником*, масса которого является отрицательной: частица и ее зеркальный двойник различаются лишь знаком массы, при этом трехмерный наблюдаемый импульс обеих частиц положителен.

Аналогично, для четырехмерного волнового вектора

$$K^\alpha = \frac{\omega}{c}\frac{dx^\alpha}{d\sigma} = k\,\frac{dx^\alpha}{d\sigma}\,, \tag{6.21}$$

характеризующего безмассовую (светоподобную) частицу, физические наблюдаемые проекции имеют вид

$$\frac{K_0}{\sqrt{g_{00}}} = \pm k\,, \qquad K^i = \frac{k}{c}\,c^i. \tag{6.22}$$

Это означает, что каждая безмассовая (светоподобная) частица как четырехмерный объект также существует в двух состояниях: в нашем мире с прямым ходом времени она проявляется в виде безмассовой частицы с положительной частотой, а в мире с обратным ходом времени — как безмассовая частица с отрицательной частотой.

Определим *материальную Вселенную* как четырехмерное пространство-время, заполненное веществом и полями, на фоне которого движутся частицы. Тогда, т.к. каждая частица является четырехмерным дипольным объектом, можно сказать, что материальная Вселенная как совокупность базового пространства-времени и частиц — также четырехмерный дипольный объект, существующий в двух состояниях: *наша Вселенная*, где массы частиц и временная координата положительны, и ее зеркальный двойник — *зеркальная Вселенная*, в которой массы частиц и временная координата отрицательны, но трехмерный наблюдаемый импульс положителен. Вместе с тем, фоновое четырехмерное пространство-время нашего мира и зеркальной Вселенной — одно и то же.

Например, исследуя свойства Вселенной в целом, мы отвлекаемся от действия ньютоновских полей тяготения редких “островов” вещества и, таким образом, рассматриваем пространство нашей Вселенной как пространство де Ситтера отрицательной четырехмерной кривизны (трехмерная наблюдаемая кривизна в этом случае положительна, см. §5.3). Таким образом, можно считать, что наша

Вселенная в целом — это область пространства де Ситтера отрицательной четырехмерной кривизны, в которой временная координата и массы частиц положительны, тогда как зеркальная Вселенная — область того же пространства де Ситтера, в которой, наоборот, временная координата и массы частиц являются отрицательными.

Вопрос о мембране, разделяющей нашу Вселенную и зеркальную Вселенную в базовом пространстве-времени, не позволяющей им “смешиваться” и препятствующей тотальной аннигиляции частиц, мы рассмотрим в следующем параграфе.

Теперь исследуем дипольную структуру Вселенной для случая, когда $d\tau = 0$, т.е. в сколлапсировавших областях обычного пространства-времени (коллапсары) и в вырожденном пространстве-времени (нуль-пространстве).

Как мы показали ранее, условие $d\tau = 0$ имеет место в обычном (невырожденном) пространстве-времени в случае коллапса. При этом пространство является голономным (не вращается). Тогда

$$d\tau = \left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right) dt = 0\,. \tag{6.23}$$

Это условие справедливо для коллапса любого типа, т.е. для коллапса любого типа гравитационного потенциала w, в том числе и для неньютоновского потенциала. При $d\tau = 0$ (6.23) четырехмерная метрика принимает вид

$$ds^2 = -d\sigma^2 = -h_{ik}\,dx^i dx^k = g_{ik}\,dx^i dx^k = g_{ik}\,u^i u^k dt^2, \tag{6.24}$$

следовательно, в этом случае

$$|ds| = i d\sigma = i\sqrt{h_{ik}u^i u^k}\,dt = iudt\,, \qquad u^2 = h_{ik}\,u^i u^k, \tag{6.25}$$

так что четырехмерный вектор импульса на поверхности коллапсара принимает вид

$$P^\alpha = m_0\,\frac{dx^\alpha}{d\sigma}\,, \qquad d\sigma = udt\,. \tag{6.26}$$

Его квадрат равен

$$P_\alpha P^\alpha = g_{\alpha\beta}\,P^\alpha P^\beta = -\,m_0^2\,, \tag{6.27}$$

следовательно, длина вектора P^α (6.26) является мнимой

$$\left|\sqrt{P_\alpha P^\alpha}\,\right| = i m_0\,. \tag{6.28}$$

Последнее, в частности, означает, что на поверхноси коллапсара обитают частицы с мнимыми массами. Но в то же время это не означает, что там должны наблюдаться сверхсветовые частицы в обычном понимании (тахионы, массы которых являются мнимыми). На поверхности коллапсара вообще не может быть речи о наблюдаемой скорости, т.к. там наблюдаемое время останавливается $d\tau = 0$.

Компоненты четырехмерного вектора импульса частиц, обитающих на поверхности коллапсара (6.26), формально имеет следующий вид

$$P^0 = \frac{m_0 c}{u}\,, \qquad P^i = \frac{m_0}{u}\,u^i. \tag{6.29}$$

Однако фактически мы не можем их наблюдать, т.к. на поверхности коллапсара собственное время обычного (вещественного) наблюдателя останавливается. Вместе с тем, входящая в это выражение скорость $u^i = \frac{dx^i}{dt}$ является координатной величиной и не зависит от собственного времени наблюдателя. Поэтому мы можем интерпретировать пространственный вектор $P^i = \frac{m_0}{u}\,u^i$ как координатный импульс частицы, а величину $\frac{m_0 c^3}{u}$ как энергию частицы на поверхности коллапсара. Здесь энергия частицы обладает лишь одним знаком, поэтому поверхность коллапсара как четырехмерная область пространства-времени (область материальной Вселенной) не является дипольным объектом из двух зеркальных двойников: поверхность коллапсара (независимо от его природы) существует в единственном состоянии.

Вместе с тем, поверхность коллапсара ($g_{00} = 0$) можно рассматривать как мембрану, разделяющую четырехмерные области пространства-времени до коллапса и после коллапса. До коллапса $g_{00} > 0$ и собственное время наблюдателя τ является вещественным. После коллапса $g_{00} < 0$, следовательно, τ становится мнимым. При пересечении наблюдателем поверхности коллапсара, его собственное время "поворачивается" на $90°$, меняясь ролями с пространственными координатами.

Понятие "светоподобная частица" на поверхности коллапсара теряет смысл, т.к., поскольку для светоподобных частиц $d\sigma = c d\tau$, на поверхности коллапсара ($d\tau = 0$) для них выполняется условие

$$u = \sqrt{h_{ik}\,u^i u^k} = \sqrt{\frac{h_{ik}\,dx^i dx^k}{dt^2}} = \frac{d\sigma}{dt} = \frac{c d\tau}{dt} = 0\,. \tag{6.30}$$

Остановка собственного времени наблюдателя ($d\tau = 0$) также имеет место в полностью вырожденном пространстве-времени

(нуль-пространстве): в нуль-пространстве, по определению, $d\tau = 0$ и $d\sigma = 0$. Эти условия (условия полного вырождения) можно записать в следующем виде

$$\mathrm{w} + v_i u^i = c^2, \qquad g_{ik}\, u^i u^k = c^2 \left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2. \tag{6.31}$$

Частицы, обитающие в вырожденном пространстве-времени (нуль-частицы), обладают нулевой обычной релятивистской массой $m = 0$, но ненулевой массой M (1.71) и ненулевым импульсом, обладающим свойством знакопостоянства

$$M = \frac{m}{1 - \frac{1}{c^2}\left(\mathrm{w} + v_i u^i\right)}\,, \qquad p^i = M u^i. \tag{6.32}$$

Таким образом, зеркального двойника имеет только обычная материя — массовые и безмассовые частицы вне состояния коллапса. При этом сколлапсировавшие объекты обычного пространства-времени (коллапсары, в том числе — черные дыры), не обладающие свойством зеркальной дипольности, являются "общими" объектами нашей Вселенной и зеркальной Вселенной. Объекты нуль-пространства, также не обладающие свойством зеркальной дипольности, в силу полного вырождения метрики находятся за пределами базового пространства-времени. Выход в "нейтральные зоны", т.е. на поверхность сколлапсировавших объектов обычного пространства-времени и в нуль-пространство, возможен как из нашей Вселенной (мира с положительным ходом координатного времени), так и из зеркальной Вселенной (мира с отрицательным ходом координатного времени).

§6.2 Условия перехода через мембрану между нашим миром и зеркальной Вселенной

Теперь выясним вопрос о том, что является мембраной, которая разделяет наш мир и зеркальную Вселенную в базовом пространстве-времени и, таким образом, препятствует тотальной аннигиляции всех частиц с отрицательными и положительными массами.

В нашем мире $dt > 0$, в зеркальной Вселенной $dt < 0$. Следовательно, разделяющая их мембрана — это область пространства-времени, в которой $dt = 0$ (координатное время останавливается). То есть, это область, характеризуемая условием

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}} \left(\frac{1}{c^2}\, v_i \mathrm{v}^i \pm 1\right) = 0\,, \tag{6.33}$$

которое можно записать в виде

$$dt = \frac{1}{1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}} \left(\frac{1}{c^2}\, v_i dx^i \pm d\tau \right) = 0\,. \tag{6.34}$$

Вторая форма записи более универсальна, т.к. применима не только в пространстве-времени Общей Теории Относительности, но и в обобщенном пространстве-времени, допускающем вырождение метрики.

Физические условия внутри мембраны ($t = const$, т.е. $dt = 0$), разделяющей наш мир и зеркальную Вселенную, согласно выражению (6.34), характеризуются следующим соотношением

$$v_i dx^i \pm c^2 d\tau = 0\,, \tag{6.35}$$

которое иначе можно записать следующим образом

$$v_i \mathrm{v}^i = \pm\, c^2. \tag{6.36}$$

Это условие представляет собой скалярное произведение вектора линейной скорости вращения пространства и вектора наблюдаемой скорости перемещения тела. Его можно записать в виде

$$v_i \mathrm{v}^i = \left|v_i\right|\left|\mathrm{v}^i\right| \cos\left(v_i; \mathrm{v}^i\right) = \pm\, c^2. \tag{6.37}$$

Отсюда следует, что это условие имеет место, когда скорости v_i и v^i равны по абсолютной величине скорости света и направлены либо в противоположные стороны (знак “минус”), либо сонаправлены (знак “плюс”).

Таким образом, мембрана, разделяющая наш мир и зеркальную Вселенную (мир с обратным ходом времени), физически представляет собой пространство, которое движется поступательно со скоростью света и одновременно вращается также со скоростью света, т.е. описывает правую или левую светоподобную спираль. В мире элементарных частиц такое пространство можно сопоставить с частицами, обладающими спиральностью (например, с фотонами).

Подставляя $dt = 0$ в выражение для ds^2, получаем метрику внутри мембраны

$$ds^2 = g_{ik}\, dx^i dx^k, \tag{6.38}$$

т.е. такое же выражение как и на поверхности коллапсара. Поскольку она является частным случаем пространственно-временной метрики с сигнатурой $(+---)$, то ds^2 в данном случае строго отрицателен. Это означает, что в области пространства-времени, являющейся мембраной между нашим миром и зеркальной Вселенной, четырех-

мерный интервал является пространственно-подобным. Отличие от пространственно-подобной метрики на поверхности коллапсара (6.24) состоит в том, что при коллапсе вращение пространства отсутствует ($g_{ik} = -h_{ik}$), тогда как в данном случае $g_{ik} = -h_{ik} + \frac{1}{c^2} v_i v_k$ (1.18). Иначе говоря,

$$ds^2 = g_{ik}\, dx^i dx^k = -\, h_{ik}\, dx^i dx^k + \frac{1}{c^2}\, v_i v_k\, dx^i dx^k, \qquad (6.39)$$

т.е. четырехмерная метрика в мембране становится пространственно-подобной из-за такого вращения пространства, при котором выполняется условие $v_i dx^i = \pm c^2 d\tau$.

В результате обычная массовая частица (независимо от знака ее массы) не может проникнуть в своем естественном виде через мембрану между нашим миром и зеркальной Вселенной: их разделяет барьер — область пространства-времени, в которой обитают светоподобные частицы, описывающие правые или левые светоподобные спирали.

Вместе с тем, как мы сейчас увидим, обменные взаимодействия между нашим миром и зеркальной Вселенной возможны, но не в результате появления частиц другого мира с массами противоположного знака, а через посредничество материи в состоянии, являющимся предельным случаем как частиц с положительными, так и с отрицательными массами.

Действительно, предельным случаем частиц с $m > 0$ и $m < 0$ являются частицы, релятивистская масса которых $m = 0$. С точки зрения геометрии пространства-времени, область обитания частиц с нулевой релятивистской массой является касательной в точке к областям обитания частиц с массами $m > 0$ и $m < 0$. Это означает, что частицы с массой $m = 0$ могут иметь обменные взаимодействия как с частицами нашего мира ($m > 0$), так и с частицами зеркальной Вселенной ($m < 0$).

Частицы с нулевой релятивистской массой $m = 0$, по определению, существуют в области пространства-времени, в которой $ds^2 = 0$ и $c^2 d\tau^2 = d\sigma^2 = 0$. Приравнивая к нулю ds^2 внутри мембраны (6.38), получаем

$$ds^2 = g_{ik}\, dx^i dx^k = 0\,. \qquad (6.40)$$

Анализ показывает, что данное условие может иметь место в двух случаях:

1) когда все величины dx^i равны нулю, т.е. $dx^i = 0$;
2) когда трехмерная метрика вырождается $\tilde{g} = \det \|g_{ik}\| = 0$.

Первый случай может быть реализован в обычном пространстве-времени при предельных условиях на поверхности коллапсара: когда вся поверхность коллапсара стягивается в точку, все $dx^i = 0$ и, следовательно, метрика на его поверхности принимает вид $ds^2 = -h_{ik}\,dx^i dx^k = g_{ik}\,dx^i dx^k$ (6.24).

Второй случай реализуется на поверхности коллапсаров, существующих в нуль-пространстве: т.к. в нуль-пространстве, по определению, $g_{ik}\,dx^i dx^k = \left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2 c^2 dt^2$, то при $\mathrm{w} = c^2$ всегда $g_{ik}\,dx^i dx^k = 0$.

Первый случай является асимптотическим, поэтому в реальности не имеет места. Следовательно, можно ожидать, что посредничество в обменных взаимодействиях между нашим миром и зеркальной Вселенной (антимиром с обратным ходом времени) осуществляют частицы с нулевой релятивистской массой (нуль-частицы) на поверхности коллапсаров в полностью вырожденном пространстве-времени (нуль-пространстве).

§ 6.3 Заключение

Итак, в этой главе мы показали, что наша Вселенная представляет собой наблюдаемую область пространства-времени, где временная координата положительна и частицы имеют положительные массы и энергии. Зеркальная Вселенная — это область пространства-времени, в которой, с точки зрения обычного наблюдателя, расположенного в нашем мире, временная координата отрицательна и частицы обладают отрицательными массами и энергиями. С точки зрения наблюдателя в нашем мире, зеркальная Вселенная — это мир с обратным ходом времени, где частицы движутся по отношению к нам из будущего в прошлое.

Эти два мира разделены пространственно-временной мембраной — областью пространства-времени, населенной светоподобными частицами движущимися вдоль светоподобных спиралей. В масштабах элементарных частиц такое пространство может быть отнесено к локальному пространству частиц, обладающих спиральностью (например, фотонов). Эта мембрана препятствует смешиванию частиц с положительными и отрицательными массами и, таким образом, предотвращает их тотальную аннигиляцию. Обменные взаимодействия между двумя мирами могут осуществляться посредством частиц с нулевой релятивистской массой (нуль-частиц) при физических условиях, существующих на поверхности коллапсаров в полностью вырожденном пространстве-времени (нуль-пространстве).

Приложение А Обозначения, принятые в этой книге

Теория хронометрических инвариантов

b^{α}	четырехмерный вектор монады
h_{ik}	трехмерный х.и.-тензор
τ	физическое наблюдаемое время
$d\sigma$	физический наблюдаемый трехмерный интервал
v^i	трехмерная х.и.-скорость
A_{ik}	трехмерный антисимметричный х.и.-тензор неголономности (вращения) пространства
F^i	трехмерный х.и.-вектор гравитационно-инерциальной силы
w	гравитационный потенциал
v_i	трехмерная линейная скорость вращения пространства
c^i	трехмерная х.и.-скорость света
D_{ik}	трехмерный х.и.-тензор скорости деформации пространства
Δ^i_{jk}	х.и.-символы Кристоффеля 2-го рода
$\Delta_{jk,m}$	х.и.-символы Кристоффеля 1-го рода

Движение частиц

u^{α}	четырехмерная скорость
u^i	трехмерная координатная скорость
P^{α}	четырехмерный вектор импульса
p^i	трехмерный вектор импульса
K^{α}	четырехмерный волновой вектор
k^i	трехмерный волновой вектор
ψ	фаза волны (эйконал)
S	действие
L	функция Лагранжа (лагранжиан)
$\hbar^{\alpha\beta}$	четырехмерный антисимметричный тензор Планка
$\hbar^{*\alpha\beta}$	четырехмерный дуальный псевдотензор Планка

Электромагнитное поле

A^α четырехмерный потенциал электромагнитного поля

φ физический наблюдаемый потенциал электромагнитного поля (временная х.и.-компонента вектора A^α)

A^i физический наблюдаемый вектор-потенциал электромагнитного поля (пространственные х.и.-компоненты вектора A^α)

$F^{\alpha\beta}$ четырехмерный тензор электромагнитного поля (тензор Максвелла)

E_i трехмерный х.и.-вектор напряженности электрического поля

E^{*ik} трехмерный х.и.-псевдотензор напряженности электрического поля

H_{ik} трехмерный х.и.-тензор напряженности магнитного поля

H^{*i} трехмерный х.и.-вектор напряженности магнитного поля

Риманово пространство

x^α четырехмерные координаты

x^i, t трехмерные координаты и время

s пространственно-временной интервал

$g_{\alpha\beta}$ четырехмерный фундаментальный метрический тензор

δ^α_β четырехмерный единичный тензор

J детерминант матрицы Якоби (якобиан)

$e^{\alpha\beta\mu\nu}$ четырехмерный совершенно антисимметричный единичный тензор

e^{ikm} трехмерный совершенно антисимметричный единичный тензор

$E^{\alpha\beta\mu\nu}$ четырехмерный совершенно антисимметричный дискриминантный тензор

ε^{ikm} совершенно антисимметричный х.и.-тензор

$\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ символы Кристоффеля 2-го рода

$\Gamma_{\mu\nu,\rho}$ символы Кристоффеля 1-го рода

$R_{\alpha\beta\mu\nu}$ тензор кривизны Римана-Кристоффеля

$T_{\alpha\beta}$ тензор энергии-импульса

ρ х.и.-плотность материи

J^i	х.и.-вектор плотности импульса
U^{ik}	х.и.-тензор напряжений
$R_{\alpha\beta}$	тензор Риччи
K	четырехмерная кривизна
C	трехмерная х.и.-кривизна
λ	космологический λ-член

Приложение В Некоторые формулы тензорного исчисления

Обычный дифференциал вектора:

$$dA^\alpha = \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\sigma}\, dx^\sigma.$$

Абсолютный дифференциал контравариантного вектора:

$$\mathrm{D}A^\alpha = \nabla_\beta\, A^\alpha dx^\beta = dA^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\mu} A^\mu dx^\beta.$$

Абсолютный дифференциал ковариантного вектора:

$$\mathrm{D}A_\alpha = \nabla_\beta\, A_\alpha dx^\beta = dA_\alpha - \Gamma^\mu_{\alpha\beta} A_\mu dx^\beta.$$

Абсолютная производная контравариантного вектора:

$$\nabla_\beta\, A^\alpha = \frac{\mathrm{D}A^\alpha}{dx^\beta} = \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\beta} + \Gamma^\alpha_{\beta\mu} A^\mu.$$

Абсолютная производная ковариантного вектора:

$$\nabla_\beta\, A_\alpha = \frac{\mathrm{D}A_\alpha}{dx^\beta} = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} - \Gamma^\mu_{\alpha\beta} A_\mu\,.$$

Абсолютная производная контравариантного тензор 2-го ранга:

$$\nabla_\beta\, F^{\sigma\alpha} = \frac{\partial F^{\sigma\alpha}}{\partial x^\beta} + \Gamma^\alpha_{\beta\mu} F^{\sigma\mu} + \Gamma^\sigma_{\beta\mu} F^{\alpha\mu}.$$

Абсолютная производная ковариантного тензора 2-го ранга:

$$\nabla_\beta\, F_{\sigma\alpha} = \frac{\partial F_{\sigma\alpha}}{\partial x^\beta} - \Gamma^\mu_{\alpha\beta} F_{\sigma\mu} - \Gamma^\mu_{\sigma\beta} F_{\alpha\mu}\,.$$

Абсолютная дивергенция вектора:

$$\nabla_\alpha\, A^\alpha = \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\alpha_{\alpha\sigma} A^\sigma.$$

Х.и.-дивергенция х.и.-вектора:

$$ {}^{*}\nabla_i\, q^i = \frac{{}^{*}\partial q^i}{\partial x^i} + q^i\, \frac{{}^{*}\partial \ln\sqrt{h}}{\partial x^i} = \frac{{}^{*}\partial q^i}{\partial x^i} + q^i\, \Delta^j_{ji}\,. $$

Х.и.-физическая дивергенция:

$$ {}^{*}\widetilde{\nabla}_i\, q^i = {}^{*}\nabla_i\, q^i - \frac{1}{c^2}\, F_i\, q^i. $$

Общековариантный оператор Даламбера:

$$ \square = g^{\alpha\beta}\, \nabla_\alpha \nabla_\beta\,. $$

Обычный оператор Лапласа:

$$ \Delta = -\, g^{ik}\, \nabla_i \nabla_k\,. $$

Х.и.-оператор Лапласа:

$$ {}^{*}\Delta = h^{ik}\, {}^{*}\nabla_i\, {}^{*}\nabla_k\,. $$

Х.и.-производные по временной и пространственным координатам:

$$ \frac{{}^{*}\partial}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\frac{\partial}{\partial t}\,, \qquad \frac{{}^{*}\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{1}{c^2}\, v_i\, \frac{{}^{*}\partial}{\partial t}\,. $$

Квадрат физической наблюдаемой скорости:

$$ \mathrm{v}^2 = \mathrm{v}_i\, \mathrm{v}^i = h_{ik}\, \mathrm{v}^i \mathrm{v}^k. $$

Линейная скорость вращения пространства:

$$ v_i = -\, c\, \frac{g_{0i}}{\sqrt{g_{00}}}\,, \quad v^i = -\, c\, g^{0i} \sqrt{g_{00}}\,, \quad v_i = h_{ik}\, v^k. $$

Вычисление квадрата величины v_i. Доказательство: так как $g_{\alpha\sigma} g^{\sigma\beta} = g^\beta_\alpha$, при $\alpha = \beta = 0$ мы получаем $g_{0\sigma} g^{\sigma 0} = \delta^0_0 = 1$. Следовательно $v^2 = v_k v^k = c^2 (1 - g_{00}\, g^{00})$, то есть:

$$ v^2 = h_{ik}\, v^i v^k. $$

Связь детерминантов метрических тензоров $g_{\alpha\beta}$ и $h_{\alpha\beta}$:

$$ \sqrt{-\, g} = \sqrt{h}\, \sqrt{g_{00}}\,. $$

Производная по физическому наблюдаемому времени:

$$ \frac{d}{d\tau} = \frac{{}^{*}\partial}{\partial t} + \mathrm{v}^k\, \frac{{}^{*}\partial}{\partial x^k}\,. $$

Первая производная по пространственно-временному интервалу:

$$\frac{d}{ds}=\frac{1}{c\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\frac{d}{d\tau}\,.$$

Вторая производная по пространственно-временному интервалу:

$$\frac{d^2}{ds^2}=\frac{1}{c^2-\mathrm{v}^2}\frac{d^2}{d\tau^2}+\frac{1}{\left(c^2-\mathrm{v}^2\right)^2}\left(D_{ik}\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k+\mathrm{v}_i\frac{d\mathrm{v}^i}{d\tau}+\frac{1}{2}\frac{{}^*\partial h_{ik}}{\partial x^m}\,\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k\mathrm{v}^m\right)\frac{d}{d\tau}\,.$$

Х.и.-метрический тензор:

$$h_{ik}=-\,g_{ik}+\frac{1}{c^2}\,v_i v_k\,,\quad h^{ik}=-\,g^{ik},\quad h_i^k=\delta_i^k\,.$$

Зельмановские соотношения между символами Кристоффеля и х.и.-характеристиками пространства отсчета:

$$D_k^i+A_{k\cdot}^{\cdot i}=\frac{c}{\sqrt{g_{00}}}\left(\Gamma_{0k}^i-\frac{g_{0k}\Gamma_{00}^i}{g_{00}}\right),$$

$$g^{i\alpha}g^{k\beta}\Gamma_{\alpha\beta}^m=h^{iq}h^{ks}\Delta_{qs}^m\,,\quad F^k=-\,\frac{c^2\,\Gamma_{00}^k}{g_{00}}\,.$$

Зельмановские 1-е и 2-е тождества:

$$\frac{{}^*\partial A_{ik}}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\frac{{}^*\partial F_k}{\partial x^i}-\frac{{}^*\partial F_i}{\partial x^k}\right)=0\,,$$

$$\frac{{}^*\partial A_{km}}{\partial x^i}+\frac{{}^*\partial A_{mi}}{\partial x^k}+\frac{{}^*\partial A_{ik}}{\partial x^m}+\frac{1}{2}\left(F_iA_{km}+F_kA_{mi}+F_mA_{ik}\right)=0\,.$$

Производная от v^2 по физическому наблюдаемому времени:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\mathrm{v}^2\right)=\frac{d}{d\tau}\left(h_{ik}\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k\right)=2D_{ik}\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k+\frac{{}^*\partial h_{ik}}{\partial x^m}\,\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k\mathrm{v}^m+2\,\mathrm{v}_k\frac{d\mathrm{v}^k}{d\tau}\,.$$

Абсолютно антисимметричный х.и.-тензор:

$$\varepsilon^{ikm}=\sqrt{g_{00}}\,E^{0ikm}=\frac{e^{0ikm}}{\sqrt{h}}\,,\quad \varepsilon_{ikm}=\frac{E_{0ikm}}{\sqrt{g_{00}}}=e_{0ikm}\sqrt{h}\,.$$

Литература

1. Levi-Civita T. Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura Riemanniana. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1917, tome 42, 173–205.
2. Tangherlini F. R. The velocity of light in uniformly moving frame. A dissertation. Stanford University, 1958. *The Abraham Zelmanov Journal*, 2009, vol. 2, 44–110.
3. Malykin G. B. and Malykin E. G. Tangherlini's dissertation and its significance for physics of the 21th century. *The Abraham Zelmanov Journal*, 2009, vol. 2, 121–143.
4. Recami E. Classical tachyons and possible applications. *Rivista del Nuovo Cimento*, 1986, vol. 9, 1–178.
5. Liberati S., Sonego S., and Visser M. Faster-than-*c* signals, special relativity, and causality. *Annals of Physics*, 2002, vol. 298, 151–185.
6. Terletskii Ya. P. The causality principle and the second law of thermodynamics. *Soviet Physics Doklady*, 1961, vol. 5, 782–785 (translated from *Doklady Academii Nauk USSR*, 1960, vol. 133, no. 2, 329–332).
7. Bilaniuk O.-M. P., Deshpande V. K., and Sudarshan E. C. G. "Meta" relativity. *American Journal of Physics*, 1962, vol. 30, no. 10, 718–723.
8. Feinberg G. Possibility of faster-than light particles. *Physical Review*, 1967, vol. 159, no. 5, 1089–1105.
9. Zelmanov A. Chronometric invariants. Dissertation, 1944. American Research Press, Rehoboth (NM), 2006.
10. Landau L. D. and Lifshitz E. M. The classical theory of fields. GITTL, Moscow, 1939. Referred with the 4th edition, Butterworth-Heinemann, 1980 (all these were translated in 1951–1980 by Morton Hammermesh).
11. Zelmanov A. L. Chronometric invariants and accompanying frames of reference in the General Theory of Relativity. *Soviet Physics Doklady*, 1956, vol. 1, 227–230 (translated from *Doklady Academii Nauk USSR*, 1956, vol. 107, no. 6, 815–818).
12. Zelmanov A. L. and Agakov V. G. Elements of the General Theory of Relativity. Nauka, Moscow, 1988 (*in Russian*).
13. Zelmanov A. L. On the relativistic theory of an anisotropic inhomogeneous universe. *The Abraham Zelmanov Journal*, 2008, vol. 1, 33–63 (translated from a manuscript of 1957).

14. Cattaneo C. General Relativity: relative standard mass, momentum, energy, and gravitational field in a general system of reference. *Nuovo Cimento*, 1958, vol. 10, 318–337.

15. Cattaneo C. Conservation laws in General Relativity. *Nuovo Cimento*, 1959, vol. 11, 733–735.

16. Cattaneo C. On the energy equation for a gravitating test particle. *Nuovo Cimento*, 1959, vol. 13, 237–240.

17. Cattaneo C. Problèmes d'interprétation en Relativité Générale. *Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique*, no. 170 "Fluides et champ gravitationel en Relativité Générale", Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1969, 227–235.

18. Raschewski P. K. Riemannsche Geometrie und Tensoranalysis. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1959 (translated by W. Richter); reprinted by Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 1993.

19. Rabounski D. and Borissova L. Particles here and beyond the mirror. 2nd edition (revised and expanded), Svenska fysikarkivet, Stockholm, 2008.

20. Terletskii Ya. P. and Rybakov Yu. P. Electrodynamics. Vishaya Shkola (High School Publishers), Moscow, 1980 (*in Russian*).

21. Papapetrou A. Spinning test-particles in General Relativity. I. *Proceedings of the Royal Society A*, 1951, vol. 209, 248–258.

22. Corinaldesi E. and Papapetrou A. Spinning test-particles in General Relativity. II. *Proceedings of the Royal Society A*, 1951, vol. 209, 259–268.

23. Suhendro I. A four-dimensional continuum theory of space-time and the classical physical fields. *Progress in Physics*, 2007, vol. 4, 34–46.

24. Suhendro I. Spin-curvature and the unification of fields in a twisted space. Svenska fysikarkivet, Stockholm, 2008.

25. Del Prado J. and Pavlov N. V. Private reports to A. L. Zelmanov, 1968.

26. Stanyukovich K. P. Gravitational field and elementary particles. Nauka, Moscow, 1965 (*in Russian*).

27. Stanyukovich K. P. On the problem of the existence of stable particles in the Metagalaxy. *Problemy Teorii Gravitazii i Elementarnykh Chastiz*, vol. 1, Atomizdat, Moscow, 1966, 267–279 (*in Russian*).

28. Stanyukovich K. P. On the problem of the existence of stable particles in the Metagalaxy. *The Abraham Zelmanov Journal*, 2008, vol. 1, 99–110 (translated from a manuscript of 1965).

29. Weber J. General Relativity and gravitational waves. Interscience Publishers, New York, 1961, 200 pages (referred with the reprint by Dover Publications, Mineola, NY, 2004).

30. Petrov A. Z. Einstein spaces. Pergamon Press, Oxford, 1969 (translated by R. F. Kelleher, edited by J. Woodrow).

31. Petrov A. Z. The classification of spaces defining gravitational fields. *The Abraham Zelmanov Journal*, 2008, vol. 1, 81–98 (translated from *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta*, 1954, vol. 114, no. 8, 55–69).
32. Grigoreva L. B. Chronometrically invariant representation of the classification of Petrov gravitational fields. *Soviet Physics Doklady*, 1970, vol. 15, 579–582 (translated from *Doklady Academii Nauk USSR*, 1970, vol. 192, no. 6, 1251–1254).
33. Gliner E. B. Algebraic properties of energy-momemtum tensor and vacuum-like states of matter. *Journal of Experimental and Theoretical Physics* (*JETP*), 1966, vol. 22, no. 2, 378–383 (translated from *Zhurnal Eksperimental'noi i Teoreticheskoi Fiziki*, 1966, vol. 49, no. 2, 543–548)
34. Gliner E. B. Vacuum-like state of medium and Friedmann's cosmology. *Soviet Physics Doklady*, 1970, vol. 15, 559–562 (translated from *Doklady Academii Nauk USSR*, 1970, vol. 192, no. 4, 771–774).
35. Sakharov A. D. The initial stage of an expanding Universe and the appearance of a nonuniform distribution of matter. *Journal of Experimental and Theoretical Physics* (*JETP*), 1966, vol. 22, 241–249 (translated from *Zhurnal Eksperimental'noi i Teoreticheskoi Fiziki*, 1966, vol. 49, 345–453).
36. Synge J. L. Relativity: the general theory. North Holland, Amsterdam, 1960 (referred with the 2nd edition, Foreign Literature, Moscow, 1963).
37. Schouten J. A. und Struik D. J. Einführung in die neuren Methoden der Differentialgeometrie. Noordhoff, Groningen, 1938 (first published in *Zentralblatt für Mathematik*, 1935, Bd. 11 und Bd. 19).
38. McVittie G. C. Remarks on cosmology. *Paris Symposium on Radio Astronomy* (IAU Symposium no. 9 and URSI Symposium no. 1, July 30 — August 6, 1958), Stanford University Press, Stanford, 1959, 533–535.
39. Oros di Bartini R. Some relations between physical constants. *Soviet Physics Doklady*, 1965, vol. 10 (translated from *Doklady Academii Nauk USSR*, 1965, vol. 163, no. 4, 861–864).
40. Oros di Bartini R. Relations between physical constants. *Progress in Physics*, 2005, vol. 3, 34–40 (translated from *Problemy Teorii Gravitazii i Elementarnykh Chastiz*, vol. 1, Atomizdat, Moscow, 1966, 249–266).
41. Crothers S. J. On the general solution to Einstein's vacuum field for the point-mass when $\lambda = 0$ and its consequences for relativistic cosmology. *Progress in Physics*, 2005, vol. 3, 7–18.
42. Kottler F. Über die physikalischen Grundlagen der Einsteinschen Gravitationstheorie. *Annalen der Physik*, 1918, Bd. 361, Nr. 14, 401–462.
43. Bondi H. Negative mass in General Relativity. *Review of Modern Physics*, 1957, vol. 29, no. 3, 423–428.
44. Schiff L. I. Sign of gravitational mass of a positron. *Physical Review Letters*, 1958, vol. 1, no. 7, 254–255.

45. Terletskii Ya. P. Paradoxes in the theory of relativity. Plenum Press, New York, 1968 (translated from Terletskii Ya. P. Paradoksy teorii otnositelnosti. Patrice Lumumba University Press, Moscow, 1965).

46. Terletskii Ya. P. Paradoxes in the theory of relativity. *American Journal of Physics*, 1969, vol. 37, no. 4, 460–461.

Предметный указатель

Борисова Л. и Рабунский Д. Поля, вакуум и зеркальная Вселенная. Шведский физический архив, Стокгольм, 2010, 277 стр.

В книге построена теория негеодезического движения частиц в пространстве-времени Общей Теории Относительности. Движение заряженных частиц в электромагнитном поле рассмотрено в искривленном пространстве-времени (в противоположность к обычной релятивистской электродинамике, построенной в пространстве-времени Специальной Теории Относительности). Теория движения частиц со спином построена на основе вариационного принципа: этот подход показывает, что все элементарные частицы со спином связаны особым квантовым соотношением. Физический вакуум и силы неньютоновской гравитации, действующие в нем, определены через лямбда-член в уравнениях Эйнштейна. Предложена космологическая концепция инверсионного взрыва Вселеной из компактного объекта, радиус которого равен классическому радиусу электрона. Рассотрены физические условия внутри мембраны, разделяющей области пространства-времени, в которых время течет в будущее и в прошлое (наш мир и зеркальная Вселенная).

Borissova L. och Rabounski D. Fält, vakuum och spegeluniversum. Svenska fysikarkivet, Stockholm, 2010, 277 s.

I denna bok föreslår vi en teori som beskriver de icke-geodesiska rörelserna av partiklar i den allmänna relativitetens rumtid. En laddat partikels rörelse i ett elektromagnetiskt fält konstrueras i en krökt rumtid (till skillnad från de vedertagna övervägandena i Minkowskis rymd i Speciella Relativitetsteorin). Spinpartiklar är förklarade inom ramen för variationsprincipen: detta synsätt visar att elementärpartiklarna måste ha en massa, vars storlek kan härledas från en speciell kvantekvation. Fysisk vakuum och icke-Newtonianska gravitationskrafter som verkar inom denna ekvation fastställs genom lambda-termen i Einsteins ekvation. Ett kosmologiskt koncept av en inversionsexplosion av universum från ett kompakt objekt med ett radie av en elektron föreslås. I boken undersöker vi de fysiska förhållandena inuti membranet som separera olika rumtidsregioner där den observerbara tiden flyter mot framtiden och forntiden (vår värld och spegelvärlden).

ISBN 978-91-85917-11-2
Printed in the USA

